

**APPROXIMATION MIT SPLINEFUNKTIONEN
UND ANWENDUNGEN AUF DIE APPROXIMATION
LINEARER FUNKTIONALE**

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Dr. rer. nat. habil.

vorgelegt

von

Dr. Hans Strauß

aus

Nürnberg



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546228_0092

**APPROXIMATION MIT SPLINEFUNKTIONEN
UND ANWENDUNGEN AUF DIE APPROXIMATION
LINEARER FUNKTIONALE**

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Dr. rer. nat. habil.

vorgelegt

von

Dr. Hans Strauß

aus

Nürnberg



Fachbereichsdekan: Professor Dr. B. Dejon

1. Berichterstatter: Professor Dr. R. DeVore

2. Berichterstatter: Professor Dr. G. Meinardus

3. Berichterstatter: Professor Dr. H. Berens

Tag des Probevortrags: 26.2.1976

I n h a l t

Einleitung	1
------------	---

Kapitel I: Lineare L_1 -Approximation mit Splinefunktionen

§ 1	Hilfssätze	10
§ 2	Konstruktion von Splines mit vorgegebenem Vorzeichenverhalten	15
§ 3	Lineare L_1 -Approximation mit Splinefunktionen	19

Kapitel II: Monosplines mit minimaler Norm und beste

Quadraturformeln

§ 4	Quadraturformeln und Monosplines	24
§ 5	Ein Momentenproblem und Perfektsplines	33
§ 6	Approximation mit festen Knoten	43
§ 7	Approximation mit freien Knoten	52
§ 8	Ein Iterationsverfahren	57
§ 9	Eine Reduktion des Approximationsproblems	66

Kapitel III: Einseitige Approximation, Quadratur-

formeln und Monosplines

§ 10	Einseitige Approximation	70
§ 11	Anwendungen der einseitigen Approximation	76
	Literatur	87

E i n l e i t u n g

Die Approximation von stetigen Funktionen durch Splinefunktionen wurde in den letzten Jahren in der L_∞ -Norm, bzw. L_2 -Norm untersucht (siehe z. B. Rice und Schumaker [1], [2]).

In dieser Arbeit wenden wir uns der Approximation in der L_1 -Norm zu und interessieren uns vor allem für die Anwendungen auf die Approximation linearer Funktionale.

In Kapitel I wird folgendes Problem betrachtet. Es werden stetige Funktionen durch Splinefunktionen in der L_1 -Norm approximiert. Dies ist ein lineares Approximationsproblem, deshalb ist die Existenz einer Minimallösung gesichert. Unsere Räume von Splinefunktionen erfüllen jedoch nicht die Haarsche Bedingung. Es folgt also nicht aus der Theorie, ob die Minimallösung eindeutig bestimmt ist.

Bei der gleichmäßigen Approximation gibt es immer stetige Funktionen, die mehr als eine Minimallösung besitzen, wenn durch einen Raum approximiert wird, der nicht die Haarsche Bedingung erfüllt (siehe Meinardus). Für die L_1 -Norm läßt sich dagegen zeigen, daß in unserem Approximationsproblem die Minimallösung eindeutig bestimmt ist.

Handscorn hat schon Charakterisierungssätze für Minimallösungen angegeben. Diese Sätze werden hier erweitert, so daß aus ihnen auch die Eindeutigkeit der Minimallösung folgt.

In Strauß [1] wurden die Sätze für Splinefunktionen mit einfachen Knoten gezeigt. Hier sind sie auf Splines mit mehrfachen Knoten übertragen, denn in dieser Arbeit benötigen wir die allgemeinere Fassung.

Hilfssätze über die Interpolation von Splinefunktionen und die Anzahl der Nullstellen von Splines werden in § 1 angegeben. Für die Charakterisierung der Minimallösung wird eine Erweiterung des folgenden Satzes benötigt.

Es sei ein Tschebyscheffsystem der Dimension n vorgegeben. Zu l Punkten mit $1 < l < n$ gibt es eine Funktion in diesem Tschebyscheffsystem, die genau in diesen Punkten das Vorzeichen wechselt. Entsprechende Aussagen für lineare Räume von Splinefunktionen werden in § 2 angegeben. Dieser Satz wird für die L_1 -Approximation verwendet, kann aber auch in anderem Zusammenhang benutzt werden, z. B. für Eindeutigkeitsaussagen bei der L_∞ -Approximation. In § 3 werden die genannten Sätze angewendet, um Charakterisierungs- und Eindeutigkeitssätze zu gewinnen.

In Kapitel II wird ein spezielleres Approximationsproblem betrachtet. Wenn man Integrale näherungsweise berechnet,

erhält man einen Fehlerausdruck

$$(1) \quad Rf = \int_a^b M(x) f^{(n)}(x) dx,$$

wenn $f \in C^{(n)}[a, b]$ und $M(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - \sum_{i=1}^k b_i (x-x_i)_+^{n-1}$

ist.

Bisher wurde - vor allem von Schoenberg und Karlin - das Problem behandelt, die Konstanten a_i, b_i, x_i so zu bestimmen, daß M eine möglichst kleine $\mathcal{L}_2$ -Norm hat.

Hier untersuchen wir das entsprechende Problem unter Verwendung der L_1 -Norm:

Die Funktion x^n wird auf dem Intervall $[a, b]$ durch Splinefunktionen der Form $s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^k b_i (x-x_i)_+^{n-1}$

in der L_1 -Norm approximiert. Dabei ist es sinnvoll, auch gewisse Randbedingungen in a und b zuzulassen.

Wir unterscheiden zwei Probleme:

(a) Approximation mit festen Knoten. Die Konstanten a_i, b_i sind Variable.

(b) Approximation mit freien Knoten. Die Konstanten a_i, b_i, x_i sind Variable.

In § 4 werden der bekannte Zusammenhang zwischen Monosplines und Quadraturformeln dargestellt und die Approximationsprobleme formuliert.

Bevor sie behandelt werden, untersuchen wir in § 5 ein

Momentenproblem, das eng mit der L_1 -Approximation verknüpft ist.

Gegeben sei der k -dimensionale Raum $B_{n-1,k}$ von polynomialen B-Splines vom Grad $n-1$ zur Knotenverteilung

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+k} \leq b \quad x_i < x_{i+n}.$$

Es werden Signumsfunktionen sgn_{α} mit höchstens k Unstetigkeitsstellen gesucht, die durch α beschrieben werden, so daß

$$(2) \quad \int_a^b s(x) \text{sgn}_{\alpha}(x) dx = 0$$

für alle $s \in B_{n-1,k}$ gilt. Die Existenz von Lösungen ist nach Hobby und Rice gesichert. Eindeutigkeitsaussagen, die für Tschebyscheffsysteme bekannt sind, lassen sich auch hier gewinnen.

Weiterhin seien Perfektsplines - Polynomsplines von spezieller Form - vorgegeben (siehe Karlin [5])

$$P(x) = c \left[x^n + 2 \sum_{i=1}^{l-1} (-1)^i (x-u_i)_+^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right].$$

Es zeigt sich, daß ein Zusammenhang zwischen der Interpolation mit Perfektsplines und der Lösung des Momentenproblems (2) besteht. Er wird unter anderem dazu verwen-

det, um Eindeutigkeitsaussagen für das Interpolationsproblem zu erhalten.

In § 6 wird das Approximationsproblem (a) betrachtet. Das bekannte Kolmogoroffsche Kriterium für die lineare L_1 -Approximation einer stetigen Funktion f durch einen Raum $B_{n-1,k}$ läßt sich mit Hilfe von Perfektsplines folgendermaßen formulieren, wenn $f-s$ für alle $s \in B_{n-1,k}$ nur endlich viele Nullstellen besitzt:

Der Spline $s_0 \in B_{n-1,k}$ ist genau dann eine Minimallösung an f , wenn ein Perfektspline P existiert, so daß

$$P(x_i) = 0 \quad i=1, \dots, n+k$$

$$P^{(n)} = \operatorname{sgn} (f-s_0)$$

gilt. Der Fehlerfunktion der Minimallösung wird also ein Perfektspline zugeordnet. Zur Bestimmung von Minimallösungen wird sich dies als fruchtbar erweisen.

Als Beispiel kann der Bernoullische Monospline angegeben werden, wenn man noch gewisse Randbedingungen des Approximationsproblems in a und b zuläßt. Schoenberg und Micchelli haben seine Eigenschaften schon untersucht. Dieser Monospline ist die Fehlerfunktion eines L_1 -Approximationsproblems. Ein etwas transformierter Eulerspline ist der im obigen Sinne zugeordnete Perfektspline.

In § 7 - 9 wenden wir uns dem Approximationsproblem (b) zu. Aus der nichtlinearen Approximationstheorie läßt sich ein notwendiges Kriterium für Minimallösungen verwenden.

(Siehe Brosowski). Es führt auf eine Charakterisierung von Lösungen des Problems mit freien Knoten, wobei die Überlegungen für das lineare Problem benutzt werden. Man kann die Minimallösung wieder mit Perfektsplines charakterisieren (§ 7). Außerdem kann man daraus ein Iterationsverfahren ableiten, das einem Spline s_1 einen Spline s_2 zuordnet, der x^n besser approximiert als s_1 , wenn s_1 nicht auf sich selbst abgebildet wird (§ 8). Jeder Fixpunkt erfüllt die Bedingungen des Kriteriums. Aus unserem Iterationsverfahren folgt deshalb auch die Existenz von Splinefunktionen, die dem notwendigen Kriterium genügen. Bei Problemen mit freien Knoten muß man eigentlich auch mehrfache Knoten zulassen. Es zeigt sich aber, daß jedem Spline mit mehrfachen Knoten ein Spline mit einfachen Knoten zugeordnet werden kann, der x^n besser approximiert (siehe § 9).

In Kapitel III wenden wir uns der einseitigen L_1 -Approximation zu. Sie wurde bereits in Arbeiten von R. Bojanic und R. DeVore untersucht. Dort wurden stets Tschebyscheffsysteme zur Approximation verwendet. Unter anderem wurde auf folgenden Zusammenhang hingewiesen:

Eine Funktion f wird einseitig durch ein Tschebyscheffsystem V der Dimension n approximiert. Die Funktion $v \in V$ sei eine Minimallösung. Dann gilt unter bestimmten Voraussetzungen, daß die Nullstellen der Fehlerfunktion

$f-v$ - die sogenannten Kontaktpunkte - Stützstellen einer Quadraturformel sind, die die Elemente von V exakt integriert. Die Zahl der Stützstellen ist häufig geringer als die Dimension n von V . Man kann diese Überlegungen auch durchführen, wenn man für V den Raum $B_{n-1,k}$ verwendet.

In § 10 werden Existenz-, Eindeutigkeits- und Charakterisierungssätze für die beste einseitige Approximation von Funktionen durch $B_{n-1,k}$ angegeben. Außerdem wird unter Benutzung der Ergebnisse von DeVore gezeigt, daß man Quadraturformeln erhalten kann, die die Räume $B_{n-1,k}$ exakt integrieren. Die Stützstellen sind wiederum Kontaktpunkte einer Fehlerfunktion $f-s_0$, wobei s_0 eine Minimal-lösung ist.

Dabei wurde kein Wert darauf gelegt, das Approximationsproblem für möglichst allgemeine Voraussetzungen zu behandeln. Es werden nur solche Probleme untersucht, wo die Nullstellenmenge der Fehlerfunktion auf Quadraturformeln führt. Mit den Sätzen von § 2 wäre es ohne weiteres möglich, auch allgemeinere Charakterisierungssätze entsprechend § 3 aufzustellen. In § 11 werden Anwendungen gezeigt. Jeder Quadraturformel, die einen Raum $B_{n-1,k}$ exakt integriert, kann man einen Monospline zuordnen, der gewisse Interpolationseigenschaften erfüllt (siehe § 4). Dies kann man verwenden, um das Interpolationspro-

blem für Monosplines zu lösen:

Gesucht wird ein Monospline, der $n+2k$ vorgegebene Nullstellen $(x_i)_{i=1}^{n+2k}$ besitzt. Diese Nullstellen seien nun die Knoten eines Raumes $B_{n-1,2k}$. Man approximiert einseitig eine Funktion f durch Elemente dieses Raumes.

Dabei ist f Element einer Funktionenklasse F in $C[a,b]$, die folgende Eigenschaft besitzt: Jede Minimallösung für eine Funktion von F hat die gleiche Kontaktpunktmenge. Diese Kontaktpunkte bilden die Knoten des gesuchten Monosplines. Die Theorie der einseitigen Approximation liefert sowohl einen Existenzbeweis des Interpolationsproblems als auch eine Möglichkeit, die Knoten durch ein Approximationsproblem zu bestimmen.

Hier wurde nicht versucht, das Interpolationsproblem möglichst allgemein zu behandeln, denn die Existenz von Lösungen ist unter recht allgemeinen Voraussetzungen bekannt. Es soll vor allem gezeigt werden, daß ein Zusammenhang zwischen einseitiger Approximation, Quadraturformeln und Monosplines besteht. Die Beziehungen lassen sich auch für allgemeinere Voraussetzungen beweisen, als sie hier angegeben wurden.

Einseitige Approximation an die Funktion x^n führt auf Monosplines ohne Vorzeichenwechsel mit minimaler L_1 -Norm. Man erhält sogenannte optimale semidefinite Kerne im Restglied (1), wie sie von Schmeißer, Jetter untersucht

wurden. Aus unserer Theorie ergeben sich Existenz-, Eindeutigkeits- und Charakterisierungssätze für die Minimallösungen.

K A P I T E L I

Lineare L_1 -Approximation mit Splinefunktionen.

§1 Hilfssätze.

In der vorliegenden Arbeit werden zur Interpolation, bzw. Approximation von Funktionen stets Räume von Splinefunktionen verwendet. Dabei können diese Räume unterschiedliches Aussehen haben. Es handelt sich um Räume von Polynomsplinefunktionen, wobei meist mehrfache Knoten auftreten. Außerdem sind in einer Reihe von Fällen Nullstellenbedingungen am Rand vorgegeben.

Es erweist sich als vorteilhaft, für jede Problemstellung die jeweils günstigste Darstellung der Splinefunktionen zu wählen. Im Einzelfall wird darauf hingewiesen, welche Darstellung verwendet wird.

Zunächst wollen wir folgende Splineräume betrachten:

Auf dem Intervall $[a, b]$ sei eine Punktmenge $(x_i)_{i=1}^{n+k}$

mit

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots x_{n+k-1} \leq x_{n+k} \leq b$$

definiert, für die $x_i < x_{i+n}$ mit $i=1, \dots, k$ gilt. Zu dieser Punktmenge wird nun ein linearer Raum von Splinefunktionen angegeben

$$(1.1) \quad B_{n-1,k}[a,b] = \langle M_1, \dots, M_k \rangle, \quad n \geq 2$$

wobei M_i ein polynomialer B-Spline vom Grad $n-1$ mit den Knoten $x_i, \dots, x_{i+n}$ ist.

Da wir stets eine Approximation von stetigen Funktionen, bzw. eine einseitige Approximation von differenzierbaren Funktionen durchführen, ist es sinnvoll, die Anzahl an Knoten, die zusammenfallen dürfen zu vermindern, so daß nur stetige, bzw. differenzierbare Splinesfunktionen vorliegen. Dies wird im Spezialfall näher präzisiert.

Von zentraler Bedeutung für die Untersuchungen wird folgender Satz (siehe Karlin [1]) sein.

Satz 1.1. Es sei die Punktmenge $(u_i)_{i=1}^k$ mit $u_1 < u_2 < \dots < u_k$ auf dem Intervall $[a,b]$ gegeben und sie erfülle die Bedingung

$$(1.2) \quad u_i \in (x_i, x_{i+n}) \quad i=1, \dots, k.$$

Dann existiert für beliebige reelle Zahlen $(y_i)_{i=1}^k$ genau ein Spline $s \in B_{n-1,k}$ mit

$$(1.3) \quad s(u_i) = y_i \quad i=1, \dots, k.$$

Dabei ist für die Knoten im Innern des Intervalls $[a,b]$ $x_i < x_{i+n-1}$ vorausgesetzt.

Falls für die Knoten im Innern von $[a,b]$ $x_i < x_{i+n-2}$ vorausgesetzt wird, gibt es einen Spline s , der (1.3) erfüllt,

auch dann, wenn für $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_k$ die Bedingung $u_1 < u_{i+2}$ für $i=1, \dots, k-2$ gilt.

Bei zusammenfallenden Interpolationspunkten sind die Bedingungen zu interpretieren als Interpolation einer entsprechenden Anzahl aufeinanderfolgender Ableitungen im betreffenden Punkt.

Weiterhin sind Aussagen über die Maximalzahl von Nullstellen sehr wichtig.

Zur Definition von Nullstellen und der Zählung ihrer Vielfachheit sei auf Karlin und Schumaker verwiesen. Wenn mehrfache Knoten und mehrfache Nullstellen erlaubt sind, ist dies sehr unübersichtlich, da es für den allgemeinen Fall schwierig ist, mehrfache Nullstellen zu zählen. Es ist jedoch leicht, falls nur einfache Nullstellen bei stetigen Splines vorliegen, bzw. höchstens doppelte Nullstellen bei differenzierbaren Splines.

Wir beschränken uns auf die Beschreibung dieser Spezialfälle, weil es die einzigen Fälle sind, die wir benötigen werden. Außerdem wollen wir im Augenblick nur Splinefunktionen betrachten, die keine identisch verschwindenden Intervalle besitzen.

Satz 1.2. Es sei $s_1 \in B_{n-1,k} \cap C$, bzw. $s_2 \in B_{n-1,k} \cap C^1$ vorgegeben. s_1 besitze nur einfache Nullstellen, s_2 be-

sitze höchstens doppelte Nullstellen und s_1, s_2 verschwinden auf keinem Teilintervall. Dann haben s_1 bzw. s_2 höchstens $k-1$ Nullstellen in (a, b) .

In den bisherigen Betrachtungen hat sich gezeigt, daß Punkt-mengen $(u_i)_{i=1}^k$, die die Bedingung

$$u_i \in (x_i, x_{i+n})$$

erfüllen, von großer Bedeutung sind. Solche Punktmen-gen lassen sich immer auswählen, wenn eine Punktmenge mit fol-genden Eigenschaften vorliegt.

Satz 1.3. Auf dem Intervall $[a, b]$ sei die Knotenmenge

$(x_i)_{i=1}^{n+k}$ gegeben

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+k} \leq b.$$

Die Punktmenge $(v_i)_{i=1}^r \subset (x_1, x_{n+k})$ enthalte in jedem Teilinter-vall $(x_i, x_{i+j+n}) \subset (x_1, x_{n+k})$ wenigstens $j+1$ Punkte. Dann kann man eine Menge so auswählen $(u_i)_{i=1}^k \subset (v_i)_{i=1}^r$, daß

$$u_i \in (x_i, x_{i+n}) \quad i=1, \dots, k$$

gilt.

Beweis: Induktion. Es sei $k=1$, d.h. die Knoten $x_1, \dots, x_{n+1}$ sind vorgegeben. Das Intervall (x_1, x_{n+1}) enthält nach Vor-schrift wenigstens einen Punkt. Daher ist die Zuordnung möglich.

Nun wird angenommen, daß die Aussage bis $k-1$ richtig sei.

Außerdem erfülle die Punktmenge $(v_i)_{i=1}^r$ die Voraussetzungen des Satzes. Es gilt $v_r \in (x_k, x_{k+n})$, wenn die Punkte v_i der Größe nach geordnet sind, denn (x_k, x_{k+n}) enthält wenigstens einen Punkt. Auf die Knotenmenge $x_1, \dots, x_{n+k-1}$ und die Punktmenge $P = \{v_i \mid v_i \in (x_1, x_{n+k-1}), v_i \neq v_r\}$ wird die Induktionsannahme angewendet. Sie liefert eine Punktmenge $(u_i)_{i=1}^{k-1}$ mit $u_i \in (x_i, x_{i+n})$ für $i=1, \dots, k-1$. Außerdem sei $u_k = v_r$. Die Menge $(u_i)_{i=1}^k$ erfüllt die Aussagen des Satzes.

§2 Konstruktion von Splines mit vorgegebenem

Vorzeichenverhalten

Gegeben sei ein Teilraum $V \subset C[a, b]$ der Dimension n , wobei V ein Tschebyscheffsystem ist. Es läßt sich folgende Aussage machen. Wenn die Punkte $(t_i)_{i=1}^r$ mit $r < n$ in (a, b) vorgegeben sind, dann gibt es ein $v \in V$, das genau in t_i das Vorzeichen wechselt und sonst keine weiteren Vorzeichenwechsel besitzt.

Wenn V kein Tschebyscheffsystem ist, sondern ein Raum von Splinefunktionen, kann man nur abgeschwächte Aussagen machen.

Lemma 2.1. Auf dem Intervall $[a, b]$ seien die Punkte

$(x_i)_{i=1}^{n+k}$ gegeben mit

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+k} \leq b, \quad x_i < x_{i+n}$$

außerdem eine Menge von Punkten $T = (t_i)_{i=1}^p \subset (x_1, x_{n+k})$,

wobei $p < k$ ist. Dann existiert ein Teilintervall (x_1, x_{i+j+n}) ,

so daß $T_1 = \{t_i \mid t_i \in T \cap (x_1, x_{i+j+n})\}$ genau j Elemente ent-

hält, die nach Umbenennung $(v_i)_{i=1}^j$ heißen mögen und für die

$$v_i \in (x_{i+v}, x_{i+v+n-1}) \quad v=1, \dots, j$$

gilt.

Beweis: Es sei $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+k}$ vorgegeben und $(t_i)_{i=1}^p$ mit $p < k$ ($k \geq 1$). Wir führen einen Induktionsbeweis über die Anzahl der Punkte p .

(a) Sei $p=1$. Also gilt $T = \{t_1\} \subset (x_1, x_{n+k})$. Ein Intervall der gesuchten Art lautet:

$$(x_1, x_{n+1}), \text{ falls } t_1 \geq x_{n+1}$$

$$(x_2, x_{n+2}), \text{ falls } t_1 \leq x_2$$

$$(x_1, x_{n+2}), \text{ falls } t_1 \in (x_2, x_{n+1}).$$

(b) Nun wird angenommen, daß der Satz für $p < r$ richtig sei.

(c) Sei $p=r$, also $T = (t_i)_{i=1}^r \subset (x_0, x_{k+n})$. Dann ist zu unterscheiden:

Es gilt $t_\nu \in (x_{\nu+1}, x_{\nu+n})$ für $\nu = 1, \dots, r$. Dann ist

(x_1, x_{n+r+1}) ein gesuchtes Intervall.

Es gibt ein erstes μ , so daß $t_\mu \leq x_{\mu+1}$ ist. Auf $(x_{\mu+1}, x_{k+n})$ und $T' = T \setminus (t_1, \dots, t_\mu)$ ist die Induktionsannahme anwendbar, die zu einem gesuchten Intervall führt.

Es gibt ein erstes μ , so daß $t_\mu \geq x_{\mu+n}$ ist. Dann gilt

$$t_\nu \in (x_{\nu+1}, x_{\nu+n}) \quad \nu = 1, \dots, \mu-1$$

und $(x_1, x_{n+\mu})$ ist das gesuchte Intervall.

Nun wird für einen Splineraum $B_{n-1,k}$ ein Satz bewiesen, der den Bemerkungen zu Beginn des Paragraphen entspricht.

Satz 2.2. Es sei der Raum von Splinefunktionen $B_{n-1,k}$ vorgegeben, der wie in (1.1) definiert sein soll. Weiterhin ist auf dem Intervall $[a,b]$ eine Punktmenge

$U = (u_i)_{i=1}^r$ mit $r < k$ gegeben.

(a) Es gelte $B_{n-1,k} \subset C[a,b]$ und

$$u_0 = a < u_1 < u_2 < \dots < u_r < b = u_{r+1}.$$

Dann gibt es einen Spline $s \in B_{n-1,k}$ mit $s \not\equiv 0$, so daß

$$\begin{aligned} \eta (-1)^i s(x) &\geq 0 & x \in (u_{i-1}, u_i) \quad i=1, \dots, r \\ \eta &= \pm 1 \\ s(u_i) &= 0 & i = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

(b) Falls $B_{n-1,k} \subset C^1[a,b]$ und

$$a < u_1 = u_2 < u_3 = u_4 < \dots < u_{r-1} = u_r < b$$

gilt dann gibt es einen Spline $s \in B_{n-1,k}$ mit $s \not\equiv 0$, so daß

$$\begin{aligned} s(x) &\geq 0 \quad \text{für } x \in [a,b] \\ s(u_i) &= 0 \quad i=1, \dots, r. \end{aligned}$$

Beweis: (a) Nach Lemma 2.1 gibt es ein Teilintervall

(x_i, x_{i+j+n}) und Punkte $(v_i)_{i=1}^j \subset (u_i)_{i=1}^r$, so daß

$$v_i \in (x_{i+v-1}, x_{i+v+n-1}) \quad v = 1, \dots, j$$

gilt. Man fügt einen beliebigen Punkt $z \in (a, b)$ in $(v_i)_{i=1}^j$ ein und erhält $(y_i)_{i=1}^{j+1}$, so daß

$$(2.1) \quad y_i \in (x_{i+v-1}, x_{i+v+n-1}) \quad v=1, \dots, j+1$$

ist. Nach Satz 1.1 existiert genau ein Spline

$s_c \in B_{n-1,j} [x_i, x_{i+j+n}]$, so daß

$$s_c(v_i) = 0 \quad i=1, \dots, j$$

$$s_c(\bar{z}) = c$$

erfüllt wird. Wir bestimmen s_{c_0} mit $c_0 \neq 0$. Es wird angenommen,

daß s_{c_0} noch eine weitere Nullstelle in (x_i, x_{i+j+n}) hat,

z.B. in z_1 . Dann wäre wegen Satz 1.1 und (2.1) die Nullfunk-

tion der einzige Spline, der die Interpolationsbedingungen

erfüllt. Dies ist ein Widerspruch zu $s_{c_0}(\bar{z}) = c_0 \neq 0$.

s wird identisch verschwindend auf das Intervall $[a, b]$

fortgesetzt und liefert die gesuchte Funktion.

Der Spline, der in (b) gesucht wird, läßt sich entsprechend

(a) gewinnen. Durch die anders gewählten Nullstellen entsteht eine Funktion, die keine Vorzeichenwechsel besitzt.

§3 Lineare L_1 - Approximation mit

Splinefunktionen.

Für unsere weiteren Betrachtungen wird die L_1 - Approximation von großer Bedeutung sein. Grundlegende Sätze, die häufig benutzt werden, seien noch einmal erwähnt.

Es wird folgender Raum betrachtet:

$C[a, b]$ sei der lineare Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$.

In diesem Raum wird die Norm

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

definiert.

Nun sei folgendes Approximationsproblem gegeben:

In einem n -dimensionalen Unterraum $V \subset C[a, b]$ wird ein Element $v_0 \in V$ gesucht, so daß für eine Funktion $f \in C[a, b]$ folgende Beziehung gilt

$$(3.1) \quad \int_a^b |f(x) - v_0(x)| dx \leq \int_a^b |f(x) - v(x)| dx \quad v \in V.$$

Dieses Problem besitzt stets Lösungen. Wenn V ein Tschebyscheffsystem ist, ist die Lösung eindeutig bestimmt.

Umgekehrt muß aber V nicht notwendigerweise ein Tschebyscheffsystem sein, damit die Lösung immer eindeutig ist.

Solch ein Beispiel werden wir hier kennenlernen.

Um die Minimallösungen charakterisieren zu können, müssen wir noch Signumsfunktionen einführen. Sei $f \in C[a,b]$ gegeben. Die Signumsfunktion sgn von f ist

$$\operatorname{sgn}(f(x)) = \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|} & \text{für } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt nun folgender Satz (siehe Rice) :

Satz 3.1. Die Funktion $f \in C[a,b]$ wird durch den linearen Teilraum $V \subset C[a,b]$ in der L_1 -Norm approximiert. Die Funktion $v_0 \in V$ ist genau dann Minimallösung an f , wenn

$$(3.2) \quad \left| \int_a^b v(x) \operatorname{sgn}(f(x) - v_0(x)) dx \right| \leq \int_{Z(f-v_0)} |v(x)| dx$$

für alle $v \in V$ und $Z(f-v_0) = \{x \in [a,b] \mid f(x) - v_0(x) = 0\}$

ist.

Satz 3.2. Es sei die Funktion $f \in C[a,b]$ vorgegeben, die durch Elemente aus $B_{n-1,k}$ approximiert wird, wobei $B_{n-1,k}$ wie in (1.1) definiert sein soll. Der Spline $s_0 \in B_{n-1,k}$ sei eine Minimallösung an f in der L_1 -Norm. Dann existiert eine Punktmenge $(t_i)_{i=1}^k$ mit $a < t_1 < \dots < t_k < b$, die den beiden Bedingungen

$$(3.3) \quad (f - s_0)(t_i) = 0 \quad i=1, \dots, k$$

$$(3.4) \quad t_i \in (x_i, x_{i+n}) \quad i=1, \dots, k$$

genügt.

Beweis: Es wird gezeigt, daß jedes Intervall $(x_i, x_{i+j+n}) \subset (x_1, x_{n+k})$ wenigstens $j+1$ Punkte von T enthält, wobei T die Nullstellenmenge von $f-s_0$ ist.

Sei (x_i, x_{i+j+n}) ein Intervall, so daß $f-s_0$ höchstens j Nullstellen enthält und in $u_1, \dots, u_r$ das Vorzeichen wechselt, wobei $r \leq j$ ist. Nach Satz 2.2a existiert ein Spline $s_1 \in B_{n-1,k}$

mit $s_1(x) = 0$ für $x \notin (x_i, x_{i+j+n})$

$$(3.5) \quad s_1(x) (f-s_0)(x) \geq 0 \quad x \in (x_1, x_{n+k}).$$

Es gibt ein $\bar{x} \in (x_i, x_{i+j+n})$, so daß

$$(3.6) \quad s_1(\bar{x}) (f-s_0)(\bar{x}) \neq 0$$

ist. Aus (3.5) und (3.6) folgt

$$\left| \int_a^b s_1(x) \operatorname{sgn} (f-s_0)(x) dx \right| > 0.$$

Andrerseits gilt auf Grund von (3.2)

$$\left| \int_a^b s_1(x) \operatorname{sgn} (f-s_0)(x) dx \right| \leq \int_T |s_1(x)| dx =$$

$$T \cap (x_i, x_{i+j+n}) \int |s_1(x)| dx = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also enthält jedes Intervall (x_i, x_{i+j+n}) wenigstens $j+1$ Nullstellen.

Nach Lemma 1.3 bedeutet dies, daß eine Punktmenge $(t_i)_{i=1}^k$ existiert, so daß

$$t_i \in (x_i, x_{i+n}) \quad i=1, \dots, k$$

gilt.

Aus diesem Charakterisierungssatz ergibt sich eine Eindeutigkeitsaussage.

Satz 3.3. Es sei $B_{n-1,k}[a,b]$ gegeben. Die beste Approximation an $f \in C[a,b]$ aus $B_{n-1,k}$ bezüglich der L_1 -Norm ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Indirekt. Es wird angenommen, es gebe zwei Funktionen s_1, s_2 in $B_{n-1,k}$, die beide Minimallösungen an f sind. Es gilt

$$\int_a^b |f(x) - s_1(x)| dx = \int_a^b |f(x) - s_2(x)| dx = \eta$$

Der Spline $s = \frac{1}{2} (s_1 + s_2)$ ist ebenfalls Minimallösung, denn er genügt der Beziehung

$$\int_a^b |f(x) - \frac{1}{2}(s_1(x) + s_2(x))| dx \leq$$

$$\frac{1}{2} \int_a^b |f(x) - s_1(x)| dx + \frac{1}{2} \int_a^b |f(x) - s_2(x)| dx = \eta.$$

Wir erhalten also

$$(3.7) \quad 2 \int_a^b |f(x) - s(x)| dx = \int_a^b |f(x) - s_1(x)| dx + \int_a^b |f(x) - s_2(x)| dx$$

Auf Grund der Beziehung

$$2|f(x)-s(x)| \leq |f(x)-s_1(x)| + |f(x)-s_2(x)| \quad a \leq x \leq b$$

und (3.7) folgt aus Stetigkeitsgründen

$$(3.8) \quad 2|f(x)-s(x)| = |f(x)-s_1(x)| + |f(x)-s_2(x)| \quad a \leq x \leq b.$$

Nach Satz 3.2 existiert eine Punktmenge $(t_i)_{i=1}^k \subset (a,b)$ mit

$$(f-s)(t_i) = 0 \quad i=1, \dots, k$$

$$t_i \in (x_i, x_{i+n}).$$

Dann folgt aus (3.8)

$$s_1(t_i) = s_2(t_i) = 0 \quad i=1, \dots, k$$

Satz 1.1 ergibt $s_1=s_2$.

K A P I T E L II

Monosplines mit minimaler Norm und

beste Quadraturformeln.

§4 Quadraturformeln und Monosplines.

Der Zusammenhang zwischen Quadraturformeln und Monosplines, der schon in einer Reihe von Arbeiten beschrieben wurde, soll hier noch einmal kurz skizziert werden.

Def. 4.1. Die Klasse der Monosplines vom Grad n ($n > 1$) mit den Knoten $(x_i)_{i=1}^k$ ist durch

$$(4.1) \quad M_{n,k}(x_1, \dots, x_k) = \left\{ M \mid M(x) = \frac{x^n}{n!} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - \sum_{i=1}^k b_i (x-x_i)_+^{n-1} \right\}$$

gegeben, wobei $x_1 < x_2 \dots < x_k$ ist und a_i, b_i reelle Zahlen sind.

In S. Karlin and L. Schumaker ist folgender Existenzsatz gezeigt.

Satz 4.2. (a) Es seien die Punkte $-\infty < t_1 < t_2 \dots < t_m < \infty$ gegeben und die positiven ganzen Zahlen $(\alpha_i)_{i=1}^m$, für die

$\alpha_i \leq n$ für $i=1, \dots, m$ und $\sum_{i=1}^m \alpha_i = n+2k$ gilt. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Monospline $M \in M_{n,k}$, der die Punkte t_i mit den entsprechenden Vielfachheiten α_i als Nullstellen besitzt.

(b) Jedes $M \in M_{n,k}$ besitzt höchstens $n+2k$ Nullstellen.

Wenn nun eine Funktion f Element der Differenzierbarkeitsklasse $C^{(n)}[a,b]$ ist, besteht folgende Relation, die man durch partielle Integration des Ausdrucks

$$\int_a^b M(x) f^{(n)}(x) dx$$

beweisen kann (siehe Karlin [2])

$$(4.2) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i f^{(i)}(b) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^{(i)}(a) + \sum_{i=1}^k A_i f(x_i) + (-1)^n \int_a^b M(x) f^{(n)}(x) dx .$$

Dabei sei M ein Element von $M_{n,k}$ und die Konstanten besitzen folgende Werte

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \alpha_i &= (-1)^{i+1} M^{(n-i-1)}(a) \\ \beta_i &= (-1)^i M^{(n-i-1)}(b) & i=0, \dots, n-1 \\ A_i &= M^{(n-1)}(x_{i-0}) - M^{(n-1)}(x_{i+0}) & i=1, \dots, k \end{aligned}$$

Eine näherungsweise Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x) dx$ wird durch die Quadraturformel

$$(4.4) \quad Qf = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i f^{(i)}(b) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^{(i)}(a) + \sum_{i=1}^k A_i f(x_i)$$

gegeben. Als Fehler Rf ergibt sich

$$(4.5) \quad Rf = (-1)^n \int_a^b M(x) f^{(n)}(x) dx .$$

In den bekannten Quadraturformeln sind n und k miteinander verknüpft. (z.B. Newton-Cotes und Gauß). In unserem Fall sollen n und k unabhängig voneinander sein.

Hier sollen nun einige Eigenschaften angegeben werden, die Quadraturformeln von der Gestalt (4.4) erfüllen.

Durch die Formel (4.4) werden Polynome bis zum Grad $n-1$ exakt integriert. Dies ist sofort aus dem Restglied abzulesen.

In der Praxis ist es wichtig, daß möglichst wenig Ableitungen in der Quadraturformel auftreten. Das erreicht man, indem man Konstanten α_i und β_i zu Null macht. Für den Monospline bedeutet dies nach (4.3), daß in den Randpunkten a und b Nullstellen vorgegeben werden.

Nun legen wir folgenden Splineraum zu Grunde

$$(4.6) \quad S_{n-1,k}[a,b] = \left\{ s \mid s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} d_{ij} (x-y_i)_+^{n-j} \right\},$$

wobei $1 \leq m_i < n$ und $\sum_{i=1}^r m_i = k$ ist. c_i und d_{ij} sind reelle Zahlen. Außerdem gilt für die Knoten

$$a < y_1 < \dots < y_r < b.$$

Durch partielle Integration von $\int_a^b M(x) s^{(n)}(x) dx = 0$,

wobei $s \in S_{n-1,k}$ und M wie oben definiert sind, ergibt sich

$$(4.7) \quad \int_a^b s(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i s^{(i)}(b) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^{(i)}(a) + \sum_{i=1}^k A_i s(x_i) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i-1} (-1)^j s^{(n-j-1)}(x) M^{(j)}(x) \Big|_{y_i+0}^{y_i-0}.$$

Wenn $M^{(j)}(y_i) = 0$ für $i=1, \dots, r$ und $j=0, \dots, m_i-1$ gilt,

verschwindet die Doppelsumme in (4.7) und die Elemente von $S_{n-1,k}$ werden durch (4.4) exakt integriert.

Eine Umkehrung dieser Aussage werden wir später noch benötigen. Es sei

$$(4.8) \quad \bar{S}_{n-1,k}[a,b] = \{ s \in S_{n-1,k} \mid \begin{aligned} s^{(i)}(a) &= 0 \quad i=0, \dots, p-1 \\ s^{(i)}(b) &= 0 \quad i=0, \dots, q-1 \end{aligned} \}$$

gegeben.

Satz 4.3. Die Quadraturformel

$$Qf = \sum_{i=1}^m A_i f(t_i) \quad a < t_1 < \dots < t_m < b$$

integriere alle $s \in \bar{S}_{n-1,k}$ exakt. Dann existiert ein Monospline M , der die Stützstellen der Quadraturformel als Knoten hat und die Nullstellen

$$(4.9) \quad \begin{aligned} M^{(i)}(a) &= 0 & i=0, \dots, n-p-1 \\ M^{(i)}(b) &= 0 & i=0, \dots, n-q-1 \\ M^{(j)}(y_i) &= 0 & i=1, \dots, r \\ & & j=0, \dots, m_i-1 \end{aligned}$$

besitzt.

Beweis: Man gibt sich einen Monospline

$$\bar{M}(x) = \frac{x^n}{n!} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{(n-1)!} (x-t_i)_+^{n-1}$$

vor. Die noch nicht festgelegten Konstanten $(a_i)_{i=0}^{n-1}$ bestimmt man folgendermaßen:

$$M^{(i)}(a) = 0 \quad i=0, \dots, n-p-1$$

$$M(z_i) = 0 \quad i=1, \dots, p,$$

wobei z_i die ersten p Knoten von $\bar{S}_{n-1,k}$ unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit sind. Sei $S_{n-1,p}^0$ der Raum von polynomialen Splinefunktionen auf $[a, b]$ vom Grad $n-1$ mit den genannten Knoten $z_1, \dots, z_p$. Ein Spline $s \in S_{n-1,p}^0$ mit den Eigenschaften

$$s^{(i)}(a) = 0 \quad i=0, \dots, p-1$$

$$s^{(i)}(b) = 0 \quad i=0, \dots, n-1 \quad i \neq \nu$$

$$s^{(\nu)}(b) \neq 0 \quad \alpha \leq \nu \leq n-1$$

liefert in (4.7) eingesetzt $M^{(n-\nu-1)}(b) = 0$.

Wenn man $s_{ij} \in S_{n-1,p}^0$ so festlegt, daß

$$h_{ij}(x) = s_{ij}(x) - (x-y_i)^{(n-j-1)}_+ \bar{e}_{n-1,k}$$

gilt, folgt aus (4.7) die Eigenschaft $M^{(j)}(y_i) = 0$.

In letzter Zeit wurde oft versucht, optimale Quadraturformeln zu gewinnen. Bei fest vorgegebenen Konstanten n und k versucht man die Konstanten α_i, β_i, A_i so zu wählen, daß das Restglied möglichst klein wird. Dies kann auf verschiedene Arten geschehen.

In der Literatur wurde folgendes Problem sehr ausführlich behandelt. Im Hinblick auf die Ungleichung

$$(4.10) \quad \left| \int_a^b M(x) f^{(n)}(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b M(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b f^{(n)}(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

versucht man den Ausdruck $\int_a^b M(x)^2 dx$ möglichst klein zu machen.

Die Funktion x^n wird auf dem Intervall $[a, b]$ durch Spline-

$$\text{funktionen } s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^k b_i (x-x_i)_+^{n-1} \text{ in der}$$

L_2 -Norm approximiert. Meist wählt man die Knoten fest.

Von Schoenberg [4] wurde aber auch das nichtlineare Problem untersucht, wo die Knoten x_i als Variable zugelassen sind. Die Formel (4.10) kann als Abschätzung für den Fehler dienen, der bei der näherungsweise Integration gemacht wurde. Es tritt aber ein Integral über die n -te Ableitung von f auf.

Nun gilt auch

$$(4.11) \quad \left| \int_a^b M(x) f^{(n)}(x) dx \right| \leq \int_a^b |M(x)| dx \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n)}(x)|.$$

Dies führt auf folgendes Approximationsproblem.

Gegeben sei der Raum von Splinefunktionen

$$S_{n-1,k} = \left\{ s \mid s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^k b_i (x-x_i)_+^{n-1} \right\}.$$

Man sucht einen Spline $s_0 \in S_{n-1,k}$, so daß

$$(4.12) \quad \int_a^b |x^n - s_0(x)| dx \leq \int_a^b |x^n - s(x)| dx \quad \text{für } s \in S_{n-1,k}$$

gilt.

Es kann wieder das lineare Problem untersucht werden, wo nur a_i , b_i als Variable zugelassen sind und die Knoten fest gewählt werden, aber auch das nichtlineare Problem, wo a_i , b_i , x_i Variable sind.

Außerdem kann man Randbedingungen vorgeben, so daß für alle $s \in S_{n-1,k}$ die Monosplines $M(x) = x^n - s(x)$ die Bedingungen

$$M^{(i)}(a) = 0 \quad i=0, \dots, p-1 \quad 0 < p \leq n$$

$$M^{(i)}(b) = 0 \quad i=0, \dots, q-1 \quad 0 < q \leq n$$

erfüllen. Dies geschieht um Konstante α_i , β_i zu Null zu machen.

Wenn man nichtlineare Approximationsprobleme mit Splinefunktionen betrachtet, werden im allgemeinen auch mehrfache Knoten zugelassen. Es wird sich jedoch zeigen (§9), daß die Minimallösungen auch bei diesem erweiterten Problem stets einfache Knoten besitzen. Deshalb wurde das Approximationsproblem in der obigen Weise formuliert.

Dieser Sachverhalt ist auch deshalb günstig, weil bei

mehrfachen Knoten des Monosplines zusätzliche Ableitungen von f in der Quadraturformel auftreten würden. Dies wäre für eine numerische Integration natürlich von Nachteil.

§5 Ein Momentenproblem und Perfektsplines.

Bei der Berechnung von Interpolationsfunktionen, deren n -te Ableitung gewisse Minimaleigenschaften besitzt, wurden von Glaeser und Karlin [5] die sogenannten Perfektsplines eingeführt. In unserer Arbeit werden diese Splines eine große Bedeutung erlangen.

Def. 5.1. Ein Perfektspline vom Grad n mit $r-1$ Knoten in $[a, b]$ ist ein Polynomspline der speziellen Form

$$(5.1) \quad P(x) = c(x^n + 2 \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^i (x-u_i)_+^n) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i,$$

wobei $c, a_0, \dots, a_{n-1}$ reelle Zahlen sind und die Knoten $(u_i)_{i=1}^{r-1}$ den Bedingungen $a < u_1 < \dots < u_{r-1} < b$ unterliegen.

Bemerkung: Die n -te Ableitung des Perfektsplines P besitzt einen konstanten Absolutbetrag $|c|n!$ und wechselt genau in den Knoten das Vorzeichen.

Es gilt der Interpolationssatz (siehe Karlin [5])

Satz 5.2. Es sei die Punktmenge $(x_i)_{i=1}^{n+k}$ mit $a \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n+k} \leq b$ gegeben, wobei $x_i < x_{i+n}$ für $i=1, \dots, k$ ist. Es sei $(y_i)_{i=1}^{n+k}$ eine Menge von reellen Zahlen. Dann existiert ein Perfektspline P von der Form (5.1) mit höchstens $k-1$ Knoten in

$[a, b]$, so daß

$$P(x_i) = y_i \quad i=1, \dots, n+k$$

gilt.

Nun betrachten wir ein Momentenproblem, das für die L_1 -Approximation eine große Bedeutung hat.

Zunächst müssen wir noch folgende Signumsfunktionen definieren.

Sei $\alpha = (a_i)_{i=0}^{n+1}$ ein $(n+2)$ -Tupel reeller Zahlen mit der Eigenschaft

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} = b.$$

Dann hat die Signumsfunktion $\operatorname{sgn}(\alpha)$ die Gestalt

$$(5.2) \quad \operatorname{sgn}(\alpha, x) = \begin{cases} (-1)^i & x \in (a_i, a_{i+1}) \quad i=0, \dots, n \\ 0 & x \in a_i \quad i=0, \dots, n+1 \end{cases}$$

Man sucht jetzt einen Vektor α , so daß

$$(5.3) \quad \int_a^b s(x) \operatorname{sgn}(\alpha, x) dx = 0 \quad s \in B_{n-1, k}$$

gilt, wobei $B_{n-1, k}$ wie in (1.1) definiert ist.

Es kann sich, daß ein Zusammenhang zwischen der Interpolation mit Perfektsplines und der Lösung des Problems (5.3) besteht.

Satz 5.3. (a) Besitzt der Perfektspline P in x_i für $i=1, \dots, n+k$ Nullstellen, dann hat $P^{(n)}$ die Eigenschaft

$$(5.4) \quad \int_a^b s(x) P^{(n)}(x) dx = 0 \quad s \in B_{n-1,k}.$$

(b) Gegeben sei eine Signumsfunktion $\text{sgn}(\alpha)$, die Problem (5.3) löst. Dann existiert ein Perfektspline P , so daß

$$(5.5) \quad P^{(n)}(x) = \text{sgn}(\alpha, x) \quad x \in [a, b]$$

$$(5.6) \quad P(x_i) = 0 \quad i=1, \dots, n+k$$

gilt.

Beweis: (a) Sei $[x_1, \dots, x_{i+n}]$ P die n -te dividierte Differenz von P in den Punkten $x_1, \dots, x_{i+n}$. Nach Curry and Schoenberg gilt für jeden B-Spline $M_i \in B_{n-1,k}$

$$[x_1, \dots, x_{i+n}] P = \int_a^b M_i(x) P^{(n)}(x) dx.$$

Nachdem $P(x_i) = 0$ für $i=1, \dots, n+k$ ist, ergibt sich

$$\int_a^b M_i(x) P^{(n)}(x) dx = 0$$

und damit die Behauptung.

(b) $\text{sgn}(\alpha)$ habe die Unstetigkeitsstellen $u_1, \dots, u_r$.

Wegen (5.5) kann der Perfektspline P nur die Gestalt

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \frac{1}{n!} \left(x^n + 2 \sum_{i=1}^r (-1)^i (x-u_i)_+^n \right)$$

haben.

Man legt nun die Konstanten (a_i) wie in Satz 4.3 fest und erhält mit den Argumenten dieses Satzes die Aussagen unserer Behauptung, wobei man eine (4.7) entsprechende Relation für Perfektsplines aufstellen muß

Satz 5.4. Es seien zwei Perfektsplines P_1 und P_2 vom Grad n gegeben, die das Interpolationsproblem

$$\begin{aligned} P_j(x_i) &= y_i & i=1, \dots, n+k \\ & & j=1, 2 \end{aligned}$$

lösen, wobei $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+k} \leq b$ mit $x_i < x_{i+n}$ für $i=1, \dots, k$ ist und $(y_i)_{i=1}^{n+k}$ reelle Zahlen sind. Dann gilt

$$(5.7) \quad \int_a^b s(x) (P_1^{(n)} - P_2^{(n)})(x) dx = 0 \quad s \in B_{n-1,k}$$

Beweis: Ebenso wie in Satz 5.3(a).

Nun soll das Momentenproblem (5.3) näher untersucht werden.

Hobby und Rice haben folgende Ergebnisse gezeigt:

Gegeben sei ein n -dimensionaler Unterraum V von $C[a, b]$ mit der Basis $(g_1, \dots, g_n)$. Es existiert stets ein $(n+2)$ -Tupel

$\alpha = (a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1})$, so daß gilt

$$(5.8) \quad \int_a^b g_i(x) \operatorname{sgn}(\alpha, x) dx = 0 \quad i=1, \dots, n.$$

$\operatorname{sgn}(\alpha)$ kann dabei weniger als n Vorzeichenwechsel besitzen.

Dieser Fall tritt auf, wenn a_i zusammenfallen.

Ist V jedoch ein Tschebyscheffsystem, so kann man nachweisen, daß die Lösung von (5.8) eindeutig bestimmt ist und $\operatorname{sgn}(\alpha)$ genau n Vorzeichenwechsel hat.

Ein entsprechendes Ergebnis erhalten wir, wenn als Teilraum V der Raum von Splinefunktionen $B_{n-1,k}$ genommen wird.

$B_{n-1,k}$ ist nur ein schwaches Tschebyscheffsystem.

Wir benötigen folgende Hilfssätze über Splinefunktionen.

Lemma 5.5. Ein Perfektspline P vom Grad n mit k Knoten sei gegeben.

(a) P besitzt höchstens $n+k$ Nullstellen.

(b) P besitze $(u_i)_{i=1}^k$ als Knoten und die $n+k$ Nullstellen

$(z_i)_{i=1}^{n+k}$ mit $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{n+k}$, wobei $z_i < z_{i+n}$ für $i=1, \dots, k$

gilt. Dann ist folgende Relation erfüllt.

$$z_i < u_i < z_{i+n} \quad i=1, \dots, k.$$

Lemma 5.6. Es seien die Punkte $(u_i)_{i=1}^k$ vorgegeben, die

$$u_i \in (x_i, x_{i+n}) \quad i=1, \dots, k$$

erfüllen. Ein Spline $s \in B_{n-1,k}$, der

$$(5.9) \quad s(u_i) = 0 \quad i=1, \dots, k \quad i \neq i_0$$

$$s(u_{i_0}) = 1$$

interpoliert, besitzt ein Kernintervall $(x_\nu, x_\mu) \subset (x_1, x_{n+k})$, auf dem er als Nullstellen genau die Nullstellen von (5.9) besitzt, die in diesem Intervall (x_ν, x_μ) liegen. Außerhalb von (x_ν, x_μ) ist s gleich Null.

Satz 5.7. Es sei $B_{n-1,k}$ gegeben. Dann existiert genau ein

$\alpha^0 = (a < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k < b)$, so daß

$$(5.10) \quad \int_a^b s(x) \operatorname{sgn}(\alpha^0, x) dx = 0 \quad s \in B_{n-1,k}$$

gilt und außerdem

$$a_i < a_{i+1} \quad i=1, \dots, k-1$$

ist.

Beweis: (a) Nach (5.8) existiert eine Signumsfunktion $\operatorname{sgn}(\alpha)$ mit höchstens k Vorzeichenwechseln. Nun wird gezeigt, daß $\operatorname{sgn}(\alpha)$ wenigstens k Vorzeichenwechsel besitzen muß.

Nach Satz 5.3 ist $\operatorname{sgn}(\alpha)$ ein Perfektspline vom Grad n zugeordnet, der in $(x_i)_{i=1}^{n+k}$ Nullstellen besitzt. Nach Lemma 5.5(a) muß P wenigstens k Knoten haben. Also besitzt P genau k Knoten und $P^{(n)} = \operatorname{sgn}(\alpha)$ k Vorzeichenwechsel.

(b) Für den Nachweis der Eindeutigkeit ist folgende Relation wichtig. Seien $u = (u_i)_{i=1}^k$ die Knoten von P. Dann folgt nach Lemma 5.5(b)

$$(5.11) \quad x_i < u_i < x_{i+n} \quad i=1, \dots, k.$$

Angenommen, es gebe zwei Signumsfunktionen $p_1 = \text{sgn}(u)$ und $p_2 = \text{sgn}(v)$, die (5.10) lösen. $u = (u_i)_{i=1}^k$, bzw. $v = (v_i)_{i=1}^k$ seien die Punkte, an denen p_1 , bzw. p_2 das Vorzeichen wechseln. Sei weiterhin $u_0 = v_0 = a$ und $u_{k+1} = v_{k+1} = b$. Es gibt ein kleinstes ν , so daß $u_\nu \neq v_\nu$ gilt. Sei $u_\nu < v_\nu$ und für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ gelte $(p_1 - p_2)(x) < 0$ für $x \in (u_\nu, u_\nu + \epsilon)$. Also gilt $(-1)^\mu (p_1 - p_2)(x) \geq 0$ für $x \in [u_{\nu+\mu}, u_{\nu+\mu+1}]$ mit $\mu = 0, \dots, k - \nu$. Nun konstruieren wir einen Spline $s_0 \in B_{n-1, k}$ mit den Eigenschaften

$$s_0(u_i) = 0 \quad i=1, \dots, k \quad i \neq \nu \quad s_0(u_\nu) = 1.$$

Aus Lemma 5.6 folgt $(p_1 - p_2)(x) s_0(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ und damit

$$\int_a^b (p_1 - p_2)(x) s_0(x) dx \geq \int_{u_\nu}^{u_{\nu+1}} (p_1 - p_2)(x) s_0(x) dx > 0.$$

Dies widerspricht der Voraussetzung

$$\int_a^b (p_1 - p_2)(x) s_0(x) dx = 0$$

Daraus folgt die eindeutige Lösbarkeit unseres Problems.

Auf Grund der Beziehung, die zwischen dem Momentenproblem und der Interpolation mit Perfektsplines besteht, kann man Ergebnisse über das Momentenproblem dazu verwenden, um Aussagen über Perfektsplines zu machen.

Satz 5.8. Es seien die Punkte

$$(5.12) \quad a \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n+k} \leq b \quad x_i < x_{i+n}$$

vorgegeben. Dann existiert (bis auf die Konstante ± 1) genau ein Perfektspline P mit höchstens k Knoten, der den Bedingungen

$$(5.13) \quad \begin{aligned} P(x_i) &= 0 \quad i=1, \dots, n+k \\ \|p^{(n)}\| &= 1 \end{aligned}$$

genügt. Dieser Perfektspline besitzt genau k Knoten.

Beweis: Der Punktmenge (5.12) ist nach (1.1) der Raum $B_{n-1,k}$ zugeordnet. Es existiert nun eine Signumsfunktion, die das Momentenproblem (5.10) löst. Aus Satz 5.3(b) folgt die Existenz eines Perfektsplines, der die Bedingungen (5.13) erfüllt. Damit ist die Existenz unter Verwendung der Sätze von Hobby und Rice gezeigt. Sie folgt natürlich auch aus Satz 5.2. Hier soll vor allem festgestellt werden, daß mit der Lösung von (5.10) die Knotenmenge unseres Perfektsplines gefunden ist.

Man nimmt nun an, daß es zwei Funktionen P_1 und P_2 gibt,

die (5.13) lösen.

Besitzen beide die gleichen Knoten $(u_i)_{i=1}^k$, dann ist

$(P_1 - P_2)^{(n)} \equiv 0$ und $P_1 - P_2$ ein Polynom vom Höchstgrad n . Auf Grund der Nullstellenbedingungen gilt $P_1 = P_2$.

Wenn P_1 und P_2 nicht die gleichen Knoten besitzen, dann sind $P_1^{(n)}$ und $P_2^{(n)}$ verschiedene Signumsfunktionen, die (5.10) lösen. Damit ist ein Widerspruch zu Satz 5.8 gezeigt und die Eindeutigkeit bewiesen.

Satz 5.9. Sei $P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + c \left[x^n + 2 \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (x-u_i)_+^n \right]$

ein Perfektspline, der die Interpolationsbedingungen

$$(5.14) \quad P(x_i) = y_i \quad i=1, \dots, n+k$$

erfüllt und dessen Knoten den Bedingungen

$$(5.15) \quad x_{i+1} < u_i < x_{i+n} \quad i=1, \dots, k-1$$

genügen. Dann ist P der einzige Perfektspline mit höchstens $k-1$ Knoten, der (5.14) genügt.

Beweis: Es gebe einen weiteren Perfektspline mit den genannten Eigenschaften

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i x^i + \bar{c} \left[x^n + 2 \sum_{i=1}^r (-1)^i (x-\bar{u}_i)_+^n \right] r \leq k-1.$$

Nach Satz 5.4 hat $P - P_1$ die Eigenschaft

$$(5.16) \quad \int_a^b s(x) (P^{(n)} - P_1^{(n)})(x) dx = 0 \quad s \in B_{n-1,k}.$$

Es zeigt sich, daß für $P^{(n)} - P_1^{(n)}$ die Aussage gilt

$$\eta (-1)^i (P^{(n)} - P_1^{(n)})(x) \geq 0 \quad x \in (u_i, u_{i+1})$$

$$u_0 = x_1, \quad u_k = x_{n+k}, \quad \eta = \pm 1, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Wegen (5.15) existiert ein Spline $s_1 \in B_{n-1,k}$, der in (x_1, x_{n+k}) kein identisch verschwindendes Intervall besitzt und in $(u_i)_{i=1}^{k-1}$ einfache Nullstellen hat. Dies folgt aus einem Schluß, wie er in Lemma 2.4 in Strauß [1] durchgeführt wird. Damit erhält man

$$\int_a^b s_1(x) (P^{(n)} - P_1^{(n)})(x) dx \neq 0,$$

falls $P^{(n)} \neq P_1^{(n)}$ ist, also ein Widerspruch zu (5.16).

Man bekommt $P^{(n)} - P_1^{(n)} \equiv 0$. Auf Grund der Nullstelleneigenschaften von $P - P_1$ bedeutet es, daß $P = P_1$ gilt.

§6 Approximation mit festen Knoten.

Perfektsplines können dazu verwendet werden, um Minimal-
lösungen bei der L_1 -Approximation zu charakterisieren.

Satz 6.1. Es sei $s_0 \in B_{n-1,k}$ gegeben, wobei $B_{n-1,k}$ wie
in (1.1) definiert ist und in $C[a,b]$ enthalten sein soll ($n \geq 2$).

Für alle $s \in B_{n-1,k}$ gelte $\int_{Z(f-s_0)} |s(x)| dx = 0$, wenn $Z(f-s_0)$

die Menge der Nullstellen von $f-s_0$ ist.

Die Funktion s_0 ist genau dann Minimallösung an f bezüglich
der Approximation in der L_1 -Norm, falls

$$(6.1) \quad \int_a^b s(x) \operatorname{sgn}(f(x)-s_0(x)) dx = 0 \quad s \in B_{n-1,k}$$

gilt.

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sind nach §3 gesichert.

Satz 6.1 kann man auf Grund der Beziehung des Momentenpro-
blems zu einer Interpolationsaufgabe mit Perfektsplines
auch folgendermaßen formulieren.

Satz 6.2. Die Voraussetzungen seien wie in Satz 6.1.

Außerdem besitze $f-s_0$ nur endlich viele Nullstellen und
wechsle in den Punkten $(u_i)_{i=1}^r$ das Vorzeichen.

Der Spline $s_0 \in B_{n-1,k}$ ist genau dann eine Minimallösung

an f , wenn ein Vektor $\alpha = (c_0, a_0, \dots, a_{n-1})$ existiert, so daß der Perfektspline

$$(6.2) \quad P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + c_0 \left(x^n + \sum_{i=1}^r 2(-1)^i (x-u_i)_+^n \right)$$

die Nullstellen

$$(6.3) \quad P(x_i) = 0 \quad i=1, \dots, n+k$$

besitzt.

Beweis: Wenn s_0 Minimallösung ist, gilt

$$\int_a^b s(x) \operatorname{sgn} (f(x) - s_0(x)) dx = 0.$$

Nach Satz 5.3(b) existiert ein Perfektspline P mit den genannten Eigenschaften.

Existiert umgekehrt ein Perfektspline P mit den Eigenschaften (6.2) und (6.3), dann gilt nach Satz 5.3(a)

$$\int_a^b s(x) P^{(n)}(x) dx = 0.$$

Außerdem folgt aus den Voraussetzungen

$$P^{(n)}(x) = \operatorname{sgn} (f(x) - s_0(x)) \quad x \in [a, b]$$

bis auf höchstens endlich viele Punkte, in denen $f - s_0$ Nullstellen besitzen muß. Dies bedeutet aber nach Satz 6.1, daß s_0 eine Minimallösung ist.

Dieses Kriterium soll noch in einem sehr einfachen Fall angegeben werden.

Es sei

$$S_{n-1,k}[a,b] = \left\{ s \mid s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^k b_i (x-x_i)_+^{n-1} \right\}$$

gegeben.

Korollar: Der Spline $s_0 \in S_{n-1,k}$ ist genau dann eine Minimallösung an die Funktion f bezüglich $S_{n-1,k}$ auf dem Intervall $[0,1]$, wenn der Perfektspline

$$p(x) = x^n + \sum_{i=1}^r 2(-1)^i (x-u_i)_+^n$$

die Nullstellen

$$p^{(i)}(0) = p^{(i)}(1) = 0 \quad i=0, \dots, n-1$$

$$p(x_i) = 0 \quad i=1, \dots, k$$

besitzt, wobei $(u_i)_{i=1}^r$ die Punkte sind, an denen $f-s_0$ das Vorzeichen wechselt.

Die Aussage läßt sich aus Satz 6.2 folgern.

Um nachzuprüfen, ob eine vorgegebene Funktion $s \in S_{n-1,k}$ Minimallösung an f ist, muß man zunächst die Vorzeichenwechsel von $f-s_0$ bestimmen und beim zugeordneten Perfektspline nachrechnen, ob er die geforderten Nullstellen am Rand, bzw. in den Knoten von $S_{n-1,k}$ besitzt.

Es ist häufig auch nötig, Randbedingungen zu zulassen.

Ein sehr bekanntes Beispiel liefert der Bernoullische Monospline, dessen Minimaleigenschaften schon Micchelli untersucht hat.

Dieser Monospline ist die Fehlerfunktion eines L_1 -Approximationsproblems und ein etwas modifizierter Eulerspline ist der zugeordnete Perfektspline im Sinne von Satz 6.2.

Der n-te Bernoullische Monospline $\bar{B}_n$ wird definiert als

$$\bar{B}_n(x) = B_n(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\bar{B}_n(x+1) = \bar{B}_n(x) ,$$

wobei B_n das n-te Bernoullische Polynom sein soll.

Folgende Eigenschaften werden für uns Bedeutung haben.

Lemma 6.3. (a) Für den Monospline $\bar{B}_{2t+1}$, wobei t eine natürliche Zahl sei, gilt auf dem Intervall $[0, m+1]$

$$(\alpha) \quad \bar{B}_{2t+1} \text{ hat die Nullstellen } \left(\frac{1}{2}i \right)_{i=0}^{2m+2}$$

$$(\beta) \quad \bar{B}_{2t+1}^{(j)}(0) = \bar{B}_{2t+1}^{(j)}(m+1) = 0 \quad j=0, \dots, 2t-2$$

(b) Für den Monospline $\bar{B}_{2t}$, wobei t eine natürliche Zahl sein soll, gilt auf dem Intervall $[0, m+1]$

$$(\alpha) \quad \bar{B}_{2t} \text{ hat die Nullstellen } \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{4} \right)_{i=0}^{2m+1}$$

$$(\beta) \quad \bar{B}_{2t}^{(j)}(0) = \bar{B}_{2t}^{(j)}(m+1) = 0 \quad j=1, \dots, 2t-3$$

Beweis: (α) folgt jeweils aus der Definition.

(β) ergibt sich aus $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$ für $n=1,2,3..$ und der Definition der Bernoullischen Polynome.

Für die weiteren Überlegungen benötigen wir eine transformierte Form des Eulersplines.

Es sei $E_n(x)$ das Eulerpolynom vom Grad n auf dem Intervall $[0,1]$. $\bar{E}_n$ sei die Fortsetzung

$$\bar{E}_n(x) = E_n(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\bar{E}_n(x+1) = -\bar{E}_n(x) \quad .$$

$\bar{E}_n$ wird auch Eulerspline genannt. Wir definieren folgende Transformationen:

$$\tilde{E}_{2t+1}(x) = (-1)^t \bar{E}_{2t+1}(2x) + (-1)^{t+1} E_{2t+1}(0)$$

$$\tilde{E}_{2t}(x) = (-1)^t \bar{E}_{2t}\left(2x - \frac{1}{2}\right) + (-1)^t E_{2t}\left(\frac{1}{2}\right) .$$

Lemma 6.4. $\tilde{E}_n$ hat folgende Eigenschaften auf dem Intervall $[0, m+1]$:

(a) Es sei $n=2t+1$ und t eine natürliche Zahl.

(α) $\tilde{E}_{2t+1}$ hat Knoten in $\left(\frac{1}{2}i\right)_{i=1}^{2m+1}$

(β) doppelte Nullstellen in $(i)_{i=1}^m$

$$(\gamma) \quad \tilde{E}_{2t+1}^{(j)}(0) = \tilde{E}_{2t+1}^{(j)}(m+1) = 0 \quad j=0,1,3,\dots,2t-1$$

(b) Es sei $n=2t$ und t eine natürliche Zahl.

$$(\alpha) \quad \tilde{E}_{2t} \text{ hat Knoten in } \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{4}\right)_{i=0}^{2m+1}$$

$$(\beta) \quad \text{doppelte Nullstellen in } (i)_{i=1}^m$$

$$(\gamma) \quad \tilde{E}_{2t}^{(j)}(0) = \tilde{E}_{2t}^{(j)}(m+1) = 0 \quad j=0,1,3,\dots,2t-1.$$

Beweis: (α) und (β) ergeben sich aus der Definition.

(γ) folgt aus $E_n'(x) = nE_{n-1}(x)$ und den Nullstelleneigenschaften der Eulerpolynome.

Nun haben wir alle Voraussetzungen zusammengestellt, um unser Approximationsproblem betrachten zu können. Die Funktion x^n wird durch Splinefunktionen approximiert. Dabei ist der gerade und der ungerade Fall von n zu unterscheiden.

(I) Es sei $n=2t+1$ und sei folgender Splineraum definiert

$$S_{2t,m}[0,m+1] = \left\{ s \mid s(x) = \sum_{i=0}^{2t} a_i x^i + \sum_{i=1}^m b_i (x-i)_+^{2t} + \sum_{i=1}^m c_i (x-i)_+^{2t-1} \right\}.$$

Satz 6.5. Auf dem Intervall $[0,m+1]$ wird die Funktion

x^{2t+1} durch Elemente des Raumes $S_{2t,m}$ in der L_1 -Norm

approximiert, wobei noch die Randbedingungen

$$M^{(i)}(0) = M^{(i)}(m+1) = 0 \quad i=0,2,\dots,2t-2$$

erfüllt sein sollen mit $M \in \bar{M}$

$$\bar{M} = \{ M(x) = x^{2t+1} - s(x) \mid s \in S_{2t,m} \}.$$

Eine Minimallösung wird durch

$$s_0(x) = x^{2t+1} - \bar{B}_{2t+1}(x)$$

geliefert, wobei $\bar{B}_{2t+1}$ ein Bernoullischer Monospline ist.

Beweis: $\bar{B}_{2t+1}$ werde durch Elemente aus

$$\bar{S}_{2t,m} = \{ s \in S_{2t,m} \mid s^{(i)}(0) = s^{(i)}(m+1) = 0 \\ i=0,2,\dots,2t-2 \}$$

approximiert. Es zeigt sich, daß die Nullfunktion Minimal-
lösung aus $\bar{S}_{2t,m}$ an B_{2t+1} ist. Daraus folgt die Aussage
des Satzes. Nach Satz 3.1 muß also

$$\int_0^{m+1} s(x) \operatorname{sgn}(x^{2t+1} - s_0(x)) dx = 0 \quad s \in \bar{S}_{2t,m}$$

gezeigt werden. Auf Grund der Eigenschaften des Eulersplines

$\tilde{E}_{2t+1}$ zeigt sich nach Lemma 6.4(a), daß

$$\tilde{E}_{2t+1}^{(2t+1)}(x) = \operatorname{sgn}(\bar{B}_{2t+1}(x)) \quad x \in [0, m+1]$$

gilt, denn die Knoten von $\tilde{E}_{2t+1}$ liegen genau in Punkten,

in denen $\bar{B}_{2t+1}$ das Vorzeichen wechselt. Nun gilt für alle $s \in \bar{S}_{2t,m}$

$$\int_0^{m+1} s(x) \tilde{E}_{2t+1}^{(2t+1)}(x) dx = \sum_{i=0}^{2t} (-1)^i s^{(i)}(x) E_{2t+1}^{(2t-i)}(x) \Big|_0^{m+1} \\ + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^1 (-1)^{(2t-j)} s^{(2t-j)}(x) \tilde{E}_{2t+1}^{(j)}(x) \Big|_{i+0}^{i-0}.$$

Nach den Aussagen von Lemma 6.4(a) verschwinden alle Ausdrücke der rechten Seite. Damit verschwindet das Integral für alle $s \in \bar{S}_{2t,m}$ und der Satz ist gezeigt.

(II) Sei $n=2t$ und

$$S_{2t-1,m}[0,m+1] = \left\{ s \mid s(x) = \sum_{i=0}^{2t-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^m b_i (x-i)_+^{2t-1} \right. \\ \left. \sum_{i=1}^m c_i (x-i)_+^{2t-2} \right\}$$

Satz 6.6. Auf dem Intervall $[0,m+1]$ wird die Funktion

x^{2t} durch Elemente des Raumes $S_{2t-1,m}$ in der L_1 -Norm approximiert, wobei noch die Randbedingungen

$$M^{(i)}(0) = M^{(i)}(m+1) = 0 \quad i=1,3,\dots,2t-3$$

erfüllt sein sollen mit $M \in \bar{M}$ und

$$\bar{M} = \{ M(x) = x^{2t-s}(x) \mid s \in S_{2t-1,m} \}.$$

Eine Minimallösung wird durch

$$s_0(x) = x^{2t} - \bar{B}_{2t}(x)$$

geliefert, wobei $\bar{B}_{2t}$ ein Bernoullischer Monospline ist.

Beweis: Der Beweis verläuft entsprechend Satz 6.5, nur werden hier statt Lemma 6.4(a) die Aussagen von Lemma 6.4(b) verwendet.

§7 Approximation mit freien Knoten.

Jetzt wollen wir uns dem Approximationsproblem mit freien Knoten zuwenden, das ebenfalls in §4 formuliert wurde.

Es sei

$$(7.1) \quad S_{n-1,k}^0[a,b] = \left\{ s \mid s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^k b_i (x-x_i)_+^{n-1} \right\}$$

gegeben, wobei $a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b$ ist und a_i, b_i reelle Zahlen sind. Die Variablen sind x_i, a_i und b_i . Gesucht wird die beste Approximation an eine Funktion $f \in C[a,b]$. Die Parametermenge ist offen. Daher läßt sich ein notwendiges Kriterium für Minimallösungen aus der nichtlinearen Approximationstheorie anwenden (siehe Brosowski).

Satz 7.1. Es sei eine Funktion $f \in C[a,b]$ gegeben und

$$s_0(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i + \sum_{i=1}^k \beta_i (x-x_1^0)_+^{n-1}$$

eine Minimallösung an f in der L_1 -Norm für das Approximationsproblem mit freien Knoten. Dann ist s_0 auch Minimallösung bezüglich folgender linearer Approximationsaufgabe:

Der Spline s_0 ist Minimallösung an f , wenn f durch den Raum

$$(7.2) \quad S_{n-1,2k}[a,b] = \left\{ s \mid s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^k b_i (x-x_i^0)_+^{n-1} + \sum_{i=1}^k c_i (x-x_i^0)_+^{n-2} \right\}$$

in der L_1 -Norm approximiert wird (mit festen Knoten).

Aus dieser Eigenschaft läßt sich folgende Charakterisierung ableiten.

Satz 7.2. Die Funktion $s_0 \in S_{n-1,k}^0$ löse das Approximationsproblem mit freien Knoten für die Funktion $f(x)=x^n$. Dann gilt:

(a) Die Fehlerfunktion $x^n - s_0(x)$ besitzt genau $n+2k$ Nullstellen $(u_i)_{i=1}^{n+2k}$ mit

$$a < u_1 < \dots < u_{n+2k} < b.$$

(b) Der Perfektspline P

$$P(x) = x^n + 2 \sum_{i=1}^{n+2k} \frac{(-1)^i (x-u_i)_+^n}{i!}$$

besitzt die Nullstellen

$$P^{(i)}(a) = P^{(i)}(b) = 0 \quad i=0, \dots, n-1$$

$$P(x_i) = P'(x_i) = 0 \quad i=1, \dots, k.$$

Beweis: Da s_0 Minimallösung ist, gilt nach Satz 7.1 und Satz 6.1

$$\int_a^b s(x) \operatorname{sgn} (x^n - s_0(x)) dx = 0 \quad s \in S_{n-1,2k},$$

wobei $S_{n-1,2k}$ wie in (7.2) definiert sei. Nach Satz 5.3(b) folgt die Existenz eines Perfektsplines mit den Eigenschaften von (b).

Das Approximationsproblem ist auf einfache Knoten beschränkt. Dies ist keine wirkliche Einschränkung, denn in einem Satz in §9 werden wir zeigen, daß zu jeder Splinefunktion s_0 , die mehrfache Knoten besitzt, stets ein Spline s_1 mit einfachen Knoten angegeben werden kann, der x^n besser approximiert als s_0 . Aus beweistechnischen Gründen wird es erst später gezeigt. Splinefunktionen, die die Eigenschaften von Satz 7.2 erfüllen, gewinnt man durch ein Iterationsverfahren.

In der Charakterisierung tauchte ein Perfektspline auf, mit dem man lineare Funktionale definieren kann, die in den folgenden Paragraphen wichtig sein werden.

Es sei P ein Perfektspline vom Grad n der Gestalt

$$P(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(x^n + 2 \sum_{i=1}^{n+2k} (-1)^i (x-u_i)_+^n \right)$$

mit

$$a < u_1 < u_2 < \dots < u_{n+2k} < b,$$

der

$$P^{(i)}(a) = P^{(i)}(b) = 0 \quad i=0, \dots, n-1$$

$$P(x_i) = P'(x_i) = 0 \quad i=1, \dots, k$$

erfüllt.

Dieser Spline existiert und ist eindeutig bestimmt nach Satz 5.2 und Satz 5.8.

Lemma 7.3. Es gilt $(-1)^n P(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ und $P(x) = 0$ für $x \in (a, b)$ genau dann, wenn $x \in (x_1, \dots, x_k)$.

Beweis: P hat in (a, b) doppelte Nullstellen in x_i und darf nach Satz 1.2 keine weiteren Nullstellen besitzen. Also hat P keine Vorzeichenwechsel. Auf Grund des Faktors $(-1)^n$ folgt, daß $(-1)^n P(x)$ in einer Umgebung von a nichtnegativ ist, also auf $[a, b]$ nichtnegativ.

Nun definieren wir ein lineares Funktional. Es sei

$$Lf = \int_a^b f(x) P^{(n)}(x) dx.$$

Dieses lineare Funktional besitzt folgende Eigenschaften

Lemma 7.4. (a) $L(x^i) = 0 \quad i=0, \dots, n-1$

(b) $L((x-t)_+^{n-1}) = (-1)^n (n-1)! P_n(t) \geq 0$ und

$L(x-t)_+^{n-1} = 0$ genau dann für $t \in (a, b)$,
wenn $t \in (x_i)_{i=1}^k$.

Beweis: Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned} L((x-t)_+^{n-1}) &= \int_a^b (x-t)_+^{n-1} P^{(n)}(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \frac{(n-1)!}{(n-i-1)!} (x-t)_+^{n-1-i} P^{(n-i-1)}(x) \Big|_a^b \\ &\quad + (-1)^n (n-1)! P(t) \end{aligned}$$

$$= (-1)^n (n-1)! P(t).$$

Daraus folgen die Aussagen von (a) und (b) unter Benutzung von Lemma 7.3.

§8 Ein Iterationsverfahren.

In diesem Paragraphen wird ein Iterationsverfahren definiert. Es gibt eine Vorschrift an, wie aus einem gegebenen Spline $s \in S_{n-1,k}^0$ (siehe (7.1)) ein Spline s_1 gewonnen werden kann, der x^n besser approximiert als der ursprüngliche Spline s . Es sollen dabei auch noch Randbedingungen zugelassen werden.

Iterationsverfahren:

(a) Gegeben sei ein Spline $s_\nu \in S_{n-1,k}^0$, so daß für

$M_\nu(x) = x^n - s_\nu(x)$ folgendes gilt:

$$(8.1) \quad \begin{aligned} M_\nu^{(i)}(a) &= 0 & i=0, \dots, p-1 \\ M_\nu^{(i)}(b) &= 0 & i=0, \dots, q-1, \end{aligned}$$

wobei p, q natürliche Zahlen mit $0 \leq p, q \leq n$ sind und außerdem

$$s_\nu(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^k L_{i\nu}(x-x_{i\nu})_+^{n-1}$$

gilt.

(b) Ein Iterationsschritt liefert ausgehend von einem Spline $s_\nu \in S_{n-1,k}^0$, für den $M_\nu(x) = x^n - s_\nu(x)$ die Randbedingungen (8.1) erfüllt, einen neuen Spline $s_{\nu+1}$, wobei

$M_{\nu+1}(x) = x^n - s_{\nu+1}(x)$ ebenfalls (8.1) erfüllt.

Es sei also s_ν vorgegeben:

(α) Dann wird der nach Satz 5.8 eindeutig bestimmte Perfektspline vom Grad n mit $N=2k+n-p-q$ Knoten gebildet

$$(8.2) \quad P_\nu(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i\nu} x^i + c_\nu (x^n + 2 \sum_{i=1}^N (-1)^i (x - u_{i\nu})_+^n),$$

wobei

$$P_\nu^{(i)}(a) = 0 \quad i=0, \dots, n-p-1$$

$$P_\nu^{(i)}(b) = 0 \quad i=0, \dots, n-q-1$$

$$(8.3) \quad P_\nu(x_{i\nu}) = P'_\nu(x_{i\nu}) = 0 \quad i=1, \dots, k$$

$$\|P_\nu^{(n)}\| = 1$$

$$(-1)^n P_\nu(x) \geq 0 \quad x \in [a, b]$$

sein soll.

(β) Man bestimmt nun einen Spline $s_{\nu+1} \in S_{n-1,k}^0$ durch

$s_{\nu+1}(x) = x^n - M_{\nu+1}(x)$, wobei $M_{\nu+1}$ ein Monospline

$$M_{\nu+1}(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,\nu+1} x^i - \sum_{i=1}^k b_{i,\nu+1} (x - x_{i,\nu+1})_+^{n-1}$$

ist, der

$$\begin{aligned}
 M_{\nu+1}^{(i)}(a) &= 0 \quad i=0, \dots, p-1 \\
 (8.4) \quad M_{\nu+1}^{(i)}(b) &= 0 \quad i=0, \dots, \sigma-1 \\
 M_{\nu+1}(u_{i\nu}) &= 0 \quad i=1, \dots, N
 \end{aligned}$$

erfüllt.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß $\int_a^b |M_\nu(x)| dx \geq \int_a^b |M_{\nu+1}(x)| dx$ gilt. Das Gleichheitszeichen ist genau

dann erfüllt, wenn $s_\nu = s_{\nu+1}$ ist. Dazu benötigen wir einige Hilfssätze.

Lemma 8.1. Es gilt

$$\begin{aligned}
 L_\nu(x^n - s_\nu(x)) &= \int_a^b M_\nu(x) P_\nu^{(n)}(x) dx = \\
 (8.5) \quad &= \sum_{i=1}^k (-1)^{n-1} b_{i\nu} (n-1)! P_\nu^{(n-1)}(x_{i\nu}) + (-1)^n n! \int_a^b P_\nu(x) dx.
 \end{aligned}$$

Beweis: Durch partielle Integration beweist man die Beziehung

$$\begin{aligned}
 \int_a^b M_\nu(x) P_\nu^{(n)}(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i M_\nu^{(i)}(x) P_\nu^{(n-i-1)}(x) \Big|_a^b \\
 &\quad + \sum_{i=1}^k (-1)^{n-1} M_\nu^{(n-1)}(x) P_\nu(x) \Big|_{x_{i\nu}+0}^{x_{i\nu}-0} \\
 &\quad + (-1)^n n! \int_a^b P_\nu(x) dx.
 \end{aligned}$$

Auf Grund der Randbedingungen von $M_{j'}$ und $P_{j'}$, die in (8.3) und (8.4) beschrieben sind, fallen die Ausdrücke der ersten Summe der rechten Seite weg. Außerdem gilt

$$M_{\nu}^{(n-1)}(x) \Big|_{x_{i\nu}+0}^{x_{i\nu}-0} = b_{i\nu} (n-1)! .$$

Daraus folgt die Behauptung (8.5).

In den nächsten beiden Sätzen werden Aussagen über das Vorzeichenverhalten von Perfekt- und Monosplines gemacht.

Lemma 8.2. Es sei P ein Perfektspline über $[a,b]$ vom Grad n mit $N=n+2k-p-q$ Knoten. Er besitze genau $n+N$ Nullstellen. Außerdem gelte $(-1)^n P(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$ und $P^{(i)}(a)=0$ für $i=0, \dots, n-p-1$ und $P^{(n-p+i)}(a) \neq 0$ für $i=0, \dots, p$.

Dann gilt

$$(-1)^{n-p} P^{(n)}(a) > 0 .$$

Beweis: Da $(-1)^n P(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$ ist, gilt

$(-1)^n P^{(n-p)}(a) > 0$. Für die weiteren Ableitungen hat man

$$P^{(n-p+i)}(a) P^{(n-p+i+1)}(a) < 0 \quad i=0, \dots, p-1.$$

Dies ergibt sich folgendermaßen. Angenommen es sei

$p^{(n-p+i)}(a) > 0$ für ein $0 \leq i < p$. Nach Lemma 2.1 in Karlin und Schumaker hat der Spline $p^{(n-p+i)}$ höchstens $N+p-i$ Nullstellen. Nach dem Satz von Rolle muß er aber wenigstens $N+p-i$ Nullstellen haben, denn P hatte $N+n$ Nullstellen. Also hat P genau $N+p-i$ Nullstellen. Sei u_1 die erste Nullstelle von $p^{(n-p+i)}$. Dann gilt $p^{(n-p+i+1)}(x) < 0$ für $x \in [a, u_1)$. Um dies zu beweisen, nimmt man an, daß $p^{(n-p+i+1)}$ eine Nullstelle in $[a, u_1)$ besitzt. Nach dem Satz von Rolle muß $p^{(n-p+i+1)}$ in $[u_1, b]$ weitere $N+p-i-1$ Nullstellen besitzen, also insgesamt $N+p-i$ Nullstellen. Dies ist ein Widerspruch zum genannten Nullstellensatz. Daher gilt

$$p^{(n-p+i)}(a) p^{(n-p+i+1)}(a) < 0.$$

Ebenso kann man die Aussage zeigen, wenn $p^{(n-p+i)}(a) < 0$ angenommen wird.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $(-1)^n p^{(n-p)}(a) > 0$ ist, folgt die Behauptung des Satzes.

Lemma 8.3. Es sei ein Monospline M vom Grad n mit k Knoten und $n+2k$ Nullstellen gegeben. Weiterhin sei $M^{(i)}(a) = 0$ für $i=0, \dots, p-1$ und $M^{(p)}(a) \neq 0$. Dann folgt, daß ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$(-1)^{n-p} M(x) > 0 \quad \text{für } x \in (a, \varepsilon).$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $M^{(i)}(a) = 0$ für $i = 0, \dots, p-1$.

Mit den gleichen Argumenten wie im vorangegangenen Satz läßt sich zeigen, daß

$$M^{(p+i)}(a) M^{(p+i+1)}(a) < 0 \quad i = 1, \dots, n-p-1$$

ist. Da M die maximale Anzahl an zulässigen Nullstellen besitzt, gilt nach einem Schluß, wie er in Lemma 2.4 bei Karlin und Schumaker verwendet wird

$$-M^{(n-1)}(a) > 0.$$

Daraus folgt $(-1)^{n-p} M^{(p)}(a) > 0$.

Lemma 8.4. Es sei ein Monospline

$$M(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - \sum_{i=1}^k b_i (x-x_i)_+^{n-1}$$

gegeben, der die Nullstellen

$$M^{(i)}(a) = 0 \quad i = 0, \dots, p-1$$

$$M^{(i)}(b) = 0 \quad i = 0, \dots, q-1$$

$$M(u_i) = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

besitzt, wobei $a < u_1 < \dots < u_N < b$ und $N = n + 2k - p - q$ ist. Dann folgt

$$b_i > 0 \quad i = 1, \dots, k.$$

Beweis: Man kann den Beweis von Karlin und Schumaker

in Lemma 2.4 verwenden. Der einzige Unterschied zu unserem Satz besteht darin, daß hier am Rand des Intervalls mehrfache Nullstellen zugelassen sind.

Mit diesen Hilfssätzen können wir jetzt folgendes Ergebnis zeigen.

Satz 8.5. Es sei (s_ν) eine Folge des Iterationsverfahrens, wobei $s_\nu \in S_{n-1,k}^0$ ist. Dann gilt

$$\int_a^b |x^{n-s_{\nu+1}}(x)| dx \leq \int_a^b |x^{n-s_\nu}(x)| dx.$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $s_\nu = s_{\nu+1}$ ist.

Beweis: Es gelten die Beziehungen

$$(8.6) \quad \begin{aligned} \int_a^b |x^{n-s_\nu}(x)| dx &= \int_a^b (x^{n-s_\nu}(x)) \operatorname{sgn} (x^{n-s_\nu}(x)) \geq \\ \int_a^b (x^{n-s_\nu}(x)) p_\nu^{(n)}(x) dx &= (-1)^n n! \int_a^b p_\nu(x) dx. \end{aligned}$$

Die letzte Aussage folgt aus Lemma 8.1. Weiterhin ist

$$(8.7) \quad \int_a^b |x^{n-s_{\nu+1}}(x)| dx = \int_a^b (x^{n-s_{\nu+1}}(x)) p_{\nu+1}^{(n)}(x) dx$$

nach Lemma 8.2 und Lemma 8.3. Lemma 8.1 ergibt

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b (x^{n-s_{\nu+1}}(x)) P_{\nu}^{(n)}(x) dx = \\
 (8.8) \quad & \sum_{i=1}^k (-1)^{n-1} b_{i,\nu+1} (n-1)! P_{\nu}(x_{i,\nu+1}) + \\
 & (-1)^n n! \int_a^b P_{\nu}(x) dx.
 \end{aligned}$$

Nun gilt $b_{i\nu} > 0$ für $i=1, \dots, k$ nach Lemma 8.4 und

$$(-1)^n P_{\nu}(x) \geq 0 \quad x \in [a, b].$$

Also ist $(-1)^{n-1} P_{\nu}(x_{i,\nu+1}) \leq 0$. Dies bedeutet, daß die erste Summe auf der rechten Seite von (8.8) nichtpositiv ist. Durch Zusammenfassung von (8.6), (8.7) und (8.8) folgt

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b |x^{n-s_{\nu}}(x)| dx \geq \int_a^b |x^{n-s_{\nu+1}}(x)| dx - \\
 (8.9) \quad & \sum_{i=1}^k (-1)^{n-1} b_{i,\nu+1} (n-1)! P_{\nu}(x_{i,\nu+1})
 \end{aligned}$$

Wenn $x_{i\nu} = x_{i,\nu+1}$ für alle $i=1, \dots, k$ gilt, dann ist

$P_{\nu} = P_{\nu+1}$, d.h. auch $s_{\nu} = s_{\nu+1}$ und damit

$$\int_a^b |x^{n-s_{\nu}}(x)| dx = \int_a^b |x^{n-s_{\nu+1}}(x)| dx.$$

Gilt wenigstens für ein μ , daß $x_{\mu,\nu} \neq x_{\mu,\nu+1}$ ist, dann hat man

$$(-1)^{n-1} P_{\nu}(x_{\mu,\nu+1}) < 0.$$

Daraus folgt nun

$$\int_a^b |x^n - s_{j'}(x)| dx > \int_a^b |x^n - s_{j'+1}(x)| dx,$$

denn der letzte Ausdruck von (8.9) wird positiv.

Bemerkung 8.6. Man kann mit Hilfe des Iterationsverfahrens die Splinefunktionen gewinnen, die die Eigenschaften besitzen, wie sie die in Satz 7.2 beschriebene Minimal-lösung hat.

§9 Eine Reduktion des Approximationsproblems.

In §7 wurde darauf hingewiesen, daß man eigentlich mehrfache Knoten beim Approximationsproblem mit freien Knoten zulassen müßte. In diesem Paragraphen wird gezeigt, daß man darauf verzichten kann.

Es wird der Splineraum $S_{n-1,k}$ von (4.6) zu Grunde gelegt.

Satz 9.1. Es sei $s_1 \in S_{n-1,k}$ gegeben, für das die Funktion

$M_1(x) = x^n - s_1(x)$ die Bedingungen

$$M_1^{(i)}(a) = 0 \quad i=0, \dots, p-1 \quad 0 \leq p, q \leq n$$

(9.1)

$$M_1^{(i)}(b) = 0 \quad i=0, \dots, q-1$$

erfüllt. Dabei besitze der Spline höchstens k (nicht notwendigerweise einfache) Knoten. Dann kann man einen Spline s_2 angeben, so daß $M_2(x) = x^n - s_2(x)$ die Randbedingungen (9.1) wie M_1 erfüllt, s_2 höchstens k einfache Knoten besitzt und

$$(9.2) \quad \int_a^b |x^n - s_1(x)| dx \geq \int_a^b |x^n - s_2(x)| dx$$

ist.

Beweis: Der Spline s_1 sei durch

$$s_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} d_{ij} (x-y_i)_+^{n-j}$$

dargestellt und $\sum_{i=1}^r m_i \leq k$. Man konstruiert einen Perfekt-spline P vom Grad n , der die folgenden Eigenschaften hat

$$P^{(i)}(a) = 0 \quad i=0, \dots, n-q-1$$

$$P^{(i)}(b) = 0 \quad i=0, \dots, n-q-1$$

(9.3)

$$P^{(j)}(y_i) = 0 \quad 0 \leq j \leq h_i-1$$

wobei $h_i = m_i$, falls m_i gerade

$h_i = m_i+1$, falls m_i ungerade.

Es sind insgesamt $2n+h-p-q$ Nullstellen vorgegeben, wenn

$h = \sum_{i=1}^r h_i$ ist. Nach Satz 5.8 gibt es genau einen Perfekt-spline P vom Grad n mit $t=n+h-p-q$ Knoten, der noch folgenden Bedingungen genügt

$$(-1)^n P(x) \geq 0 \quad x \in [a, b]$$

$$||P^{(n)}|| = 1.$$

Nach den gleichen Überlegungen wie in Lemma 7.3 besitzt P keine Vorzeichenwechsel. P ist gegeben durch

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + c(x^n + 2 \sum_{i=1}^t (-1)^i (x-u_i)_+^n).$$

Wie in Satz 8.5. erhält man

$$\begin{aligned}
 \int_a^b |x^n - s_1(x)| dx &\geq \int_a^b (x^n - s_1(x)) P^{(n)}(x) dx = \\
 (9.4) \qquad \qquad \qquad &= (-1)^n n! \int_a^b P(x) dx .
 \end{aligned}$$

Der Monospline

$$M_2(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - \sum_{i=1}^{h'} b_i (x-x_i)_+^{n-1}$$

erfülle die Bedingungen

$$M_2(u_i) = 0 \qquad i=1, \dots, t$$

$$M_2^{(i)}(a) = 0 \qquad i=0, \dots, p-1$$

$$M_2^{(i)}(b) = 0 \qquad i=0, \dots, q-1,$$

wobei $h' = \frac{h}{2}$ ist.

Es wird nun gezeigt, daß

$$s_2(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - \sum_{i=1}^{h'} b_i (x-x_i)_+^{n-1}$$

die gesuchte Funktion ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \int_a^b |M_2(x)| dx &= \int_a^b M_2(x) P^{(n)}(x) dx = \\
 (9.5) \qquad \sum_{i=1}^{h'} (-1)^{n-1} b_i (n-1)! P(x_i) &+ (-1)^n n! \int_a^b P(x) dx.
 \end{aligned}$$

Nach Lemma 8.4 ist $b_i > 0$ für $i=1, \dots, h'$ und damit

$$\sum_{i=1}^{h'} (-1)^{n-1} b_i (n-1)! P(x_i) \leq 0.$$

Ein Vergleich von (9.4) und (9.5) ergibt

$$\int_a^b |M_1(x)| dx \geq \int_a^b |M_2(x)| dx$$

gilt.

K A P I T E L III

Einseitige Approximation, Quadraturformeln

und Monosplines.

§10 Einseitige Approximation.

Das einseitige Approximationsproblem, das den letzten beiden Paragraphen zu Grunde liegt, lautet:

Es sei eine Funktion f aus $C[a,b]$, dem Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$, gegeben. Außerdem sei der Splineraum $B_{n-1,k}$ vorgegeben ($n \geq 2$), der wie in (1.1) definiert sei.

Gesucht ist ein Element $s_0 \in B_{n-1,k}$, für das

$$(10.1) \quad \int_a^b (f(x) - s_0(x)) dx \leq \int_a^b (f(x) - s(x)) dx \quad s \in B_{n-1,k}(f)$$

gilt, wobei s, s_0 Elemente von

$$(10.2) \quad B_{n-1,k}(f) = \{ s \in B_{n-1,k} \mid (f(x) - s(x)) \geq 0, x \in [a,b] \}$$

sind. Falls f und s differenzierbare Funktionen sind, wollen wir später folgende Nullstellenzählung verwenden: In (a,b) wird eine Nullstelle von $f-s$ doppelt, in a und b einfach gezählt.

Satz 10.1. Das genannte Approximationsproblem besitzt stets eine Lösung.

Für unsere weiteren Betrachtungen wird die Nullstellenmenge der Fehlerfunktion von Bedeutung sein.

Die Sätze von §2 würden Charakterisierungssätze für wesentlich allgemeinere Probleme erlauben, als wir nun behandeln wollen. Hier sollen nur solche Approximationsprobleme betrachtet werden, die für die Approximation linearer Funktionale von Bedeutung sind.

Def. 10.2. Es sei $f-s_0$ eine Fehlerfunktion für das Problem (10.1). Jeder Punkt $\bar{x} \in [a, b]$, für den $(f-s_0)(\bar{x})=0$ gilt, heiße Kontaktpunkt.

Für unsere Betrachtungen werden Kontaktpunktmenngen mit einer bestimmten Eigenschaft wichtig sein.

Def. 10.3. Es sei die Knotenmenge $a \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n+k} \leq b$ gegeben. Dann besitze die Menge $U=(u_i)_{i=1}^r$ folgende Eigenschaft:

Es existiert eine Menge von Punkten $(v_i)_{i=1}^k$, so daß

$$(u_i)_{i=1}^r \subset (v_i)_{i=1}^k \quad v_i < v_{i+1}$$

(10.3)

$$v_i \in (x_i, x_{i+n}) \quad i=1, \dots, k$$

gilt. Falls in a bzw. b n -fache Knoten vorliegen, wird

$$v_1 \in [x_1, x_{n+1}) \text{ bzw. } v_k \in (x_k, x_{n+k}]$$

zugelassen.

Falls eine Minimallösung s_0 an f , die das Approximationsproblem (10.1) löst, eine Fehlerfunktion besitzt, deren Kontaktpunktmenge die Eigenschaft von Def. 10.3 hat, kann man daraus eine Quadraturformel ableiten. Ein Beweis, der bei DeVore angegeben ist, läßt sich auf unser Problem übertragen.

Satz 10.4. Es sei $s_0 \in B_{n-1,k}$ eine Minimallösung an $f \in C[a,b]$. Die Fehlerfunktion $f-s_0$ habe die Kontaktpunkte $U = (u_i)_{i=1}^r$, die die Eigenschaften von Def. 10.3 besitzen. Dann existiert eine Quadraturformel

$$Qs = \sum_{i=1}^r A_i s(u_i) \quad A_i > 0 \quad i=1, \dots, r,$$

die alle Elemente $s \in B_{n-1,k}$ exakt integriert.

Beweis: Die Menge der Kontaktpunkte U von $f-s_0$ ist in einer Menge $(v_i)_{i=1}^k$ enthalten, für die (10.3) gilt. Dann kann man eine Quadraturformel bestimmen

$$\int_a^b g(x) dx \sim Qg = \sum_{i=1}^k A_i g(v_i),$$

die alle $s \in B_{n-1,k}$ exakt integriert. Die Gewichte ergeben

sich folgendermaßen:

Es sei $s_j \in B_{n-1,k}$

$$s_j(v_i) = 0 \quad i=1, \dots, k \quad i \neq j$$

$$s_j(v_j) = 1$$

Wegen (10.3) ist s_j eindeutig festgelegt. Dann gilt

$$A_j = \int_a^b s_j(x) dx.$$

Mit den gleichen Argumenten wie in Satz 4.1 bei DeVore folgt, daß $A_k=0$ für $v_k \notin U$ und $A_k > 0$ für $v_k \in U$.

Bemerkung: Es zeigt sich durch Satz 10.5, daß es sinnvoll ist, Approximationsprobleme zu betrachten, wo die Kontaktpunktmenge der Minimallösung die Eigenschaften von Def. 10.3 besitzt. Die Kontaktpunktmenge liefert die Stützstellen einer Quadraturformel. Betrachtet man nun einen Teilraum von $B_{n-1,k}$, nämlich die Menge aller Funktionen, die außerhalb von (x_i, x_{i+j+n}) gleich Null sind, dann hat man einen $(j+1)$ -dimensionalen Raum vorliegen. Die Elemente dieses Raumes kann man durch eine Quadraturformel mit höchstens $j+1$ Stützstellen exakt integrieren. Die Bedingung von Def. 10.3 ist daher eine sehr natürliche Bedingung, denn sie stellt sicher, daß die erhaltenen Quadraturformeln nicht mehr als $j+1$ Stützstellen in (x_i, x_{i+j+n}) enthalten

Entsprechend Satz 3.2 lassen sich bei einseitiger L_1 -Approximation Aussagen über die Nullstellenmenge der Fehlerfunktion einer Minimallösung machen. Dazu sind Satz 2.2 und Satz 10.4 von Nutzen. Mit Satz 2.2 könnte man wesentlich allgemeinere Aussagen gewinnen als hier gemacht werden. Aber nur die hier genannten Sätze wollen wir später auch in den Anwendungen benutzen.

Im allgemeinen Fall, d.h. wenn die Kontaktpunktmenge der Fehlerfunktion keine Bedingungen erfüllen muß, sind zusätzliche Betrachtungen nötig, falls Kontaktpunkte in Knoten liegen. Daher verzichten wir auf diese Untersuchungen.

Satz 10.5. Die Funktion $f \in C^1[a, b]$ besitze eine Minimallösung s_0 bei einseitiger Approximation durch $B_{n-1, k} \subset C^1[a, b]$, so daß die Fehlerfunktion $f - s_0$ eine Kontaktpunktmenge nach Def. 10.3 besitzt. Dann enthält jedes Intervall $(x_i, x_{i+j+n}) \subset [x_1, x_{n+k}]$ wenigstens $j+1$ Nullstellen. Falls n -fache Knoten in a bzw. b liegen, ist (x_1, x_{1+j+n}) durch $[x_1, x_{1+j+n})$ bzw. (x_{k-j}, x_{n+k}) durch $[x_{k-j}, x_{n+k}]$ zu ersetzen.

Beweis: Angenommen es gebe ein Intervall (x_i, x_{i+j+n}) , das nicht mehr als j Nullstellen enthält. Nach Satz 10.4 liefern die Kontaktpunkte $V = (v_i)_{i=1}^r$ von $f - s_0$ eine Quadraturformel

$$Qs = \sum_{i=1}^r A_i s(v_i),$$

die alle Elemente von $B_{n-1, k}$ exakt integriert. Die Kontakt-

punkte, die in (x_i, x_{i+j+n}) liegen, heißen $(u_i)_{i=1}^m$. Es gibt nach Satz 2.2 eine Funktion $s \in B_{n-1,k}$, die folgende Bedingungen erfüllt, da $m \leq [\frac{j}{2}]$ ist,

$$s \not\equiv 0$$

$$s(x) \geq 0 \quad x \in [a, b]$$

$$s(x) = 0 \quad x \notin (x_i, x_{i+j+n})$$

$$s(u_i) = 0 \quad i=1, \dots, m.$$

Für diese Funktion gilt

$$\int_a^b s(x) dx > 0.$$

Nach der Quadraturformel gilt jedoch

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{i=1}^r A_i s(v_i) = 0,$$

denn $s(v_i)=0$ für $i=1, \dots, r$. Dies ist ein Widerspruch.

Folgerung 10.6. Die Funktion $f \in C^1[a, b]$ werde durch Elemente aus $B_{n-1,k} \subset C^1[a, b]$ einseitig approximiert. Jede Fehlerfunktion $f-s$ mit $s \in B_{n-1,k}$ besitze eine Kontaktpunktmenge mit den Eigenschaften von Def.10.3. Dann existiert genau eine Minimallösung.

Beweis: Man nimmt an, es gebe zwei Minimallösungen s_0 und s_1 . Der Spline $\bar{s} = \frac{1}{2}(s_0 + s_1)$ ist ebenfalls Minimallösung, denn die Menge der Minimallösungen ist konvex. Es sei

$(x_i, x_{i+j+n}) \subset (x_1, x_{n+k})$ ein Intervall, auf dem $\bar{s}$ kein identisch verschwindendes Intervall besitzt. $f - \bar{s}$ hat nach Satz 10.5 wenigstens $j+1$ Nullstellen in (x_i, x_{i+j+n}) . Dies bedeutet, daß auch $s_0 - s_1$ diese Nullstellen besitzt (siehe Satz 3.3). Nach Satz 1.2 ist dies jedoch nicht möglich.

§11 Anwendungen der einseitigen Approximation.

Die Aussagen von §10 sollen nun angewendet werden. Es werden zunächst Funktionen bestimmt, deren Minimallösung bei einseitiger Approximation die im letzten Paragraphen geforderten Eigenschaften besitzt.

(I) Bestimmung von Funktionen mit einer Minimaleigenschaft

Def. 11.1. Gegeben sei eine Knotenverteilung

$$a=x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1}=b.$$

Es sei nun $g \in C^2[a,b]$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$(11.1) \quad (-1)^{i+1} g''(x) > 0 \quad x \in (x_i, x_{i+1}).$$

Satz 11.2. Für jeden Polygonzug $s(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{i=1}^k b_i (x-x_i)_+$

hat $g-p$ nicht mehr als $k+2$ Nullstellen, wobei g eine Funktion wie in Def. 11.1 ist.

Beweis: Induktion. Es sei g die vorgegebene Funktion und p der Polygonzug.

Für $k=1$ gilt:

(α) $(g-p)(x_2) < 0$. Hat $(g-p)$ auf $(x_1, x_2]$ keine Nullstelle, dann kann $g-p$ auf $[x_0, x_2]$ zwei Nullstellen haben. Besitzt $g-p$ auf $(x_1, x_2]$ eine Nullstelle, dann besitzt $g-p$ auf $[x_0, x_1]$ höchstens eine. Also hat $g-p$ in diesem Fall höchstens

tens zwei Nullstellen auf $[x_0, x_2]$.

(β) $(q-p)(x_2) \geq 0$. Dann hat $q-p$ höchstens drei Nullstellen.

(γ) $[x_0, x_1]$ enthält höchstens zwei Nullstellen von $q-p$.

Für $\nu \leq r$ gelte folgende Behauptung:

(α) $q-p$ besitzt höchstens 2ν Nullstellen in $[x_0, x_{2\nu}]$,

falls $(g-p)(x_{2\nu}) < 0$ ist.

(β) $q-p$ besitzt höchstens $2\nu+1$ Nullstellen in $[x_0, x_{2\nu}]$,

falls $(g-p)(x_{2\nu}) \geq 0$ ist.

(γ) $q-p$ besitzt höchstens 2ν Nullstellen in $[x_0, x_{2\nu-1}]$.

Nun betrachten wir das Intervall $[x_0, x_{2r+2}]$.

(α) $(g-p)(x_{2r}) < 0$. $g-p$ hat auf $(x_{2r}, x_{2r+2}]$ höchstens drei Nullstellen, also hat $q-p$ höchstens $2r+3$ Nullstellen auf $[x_0, x_{2r+2}]$.

(β) $(g-p)(x_{2r}) \geq 0$. $g-p$ hat auf $(x_{2r}, x_{2r+2}]$ höchstens zwei Nullstellen, also hat $q-p$ höchstens $2r+3$ Nullstellen auf $[x_0, x_{2r+2}]$.

(γ) Im Fall (α) kann $q-p$ auf $(x_{2r}, x_{2r+1}]$ zwei Nullstellen besitzen, im Fall (β) nur eine Nullstelle. Also hat $g-p$ auf $[x_0, x_{2r+1}]$ höchstens $2r+2$ Nullstellen.

Nun sei folgende Menge von Funktionen gegeben:

$$F = \{ f \in C^{(n)}[a, b] \mid (-1)^{i+1} f^{(n)}(x) > 0 \quad x \in (x_{i-1}, x_i) \} \quad (11.2) \quad i=1, \dots, k+1 \}$$

wobei $a=x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1}=b$ ist.

Satz 11.3. Es sei eine Funktion $f \in F$ vorgegeben und ein Spline

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^k b_i (x-x_i)_+^{n-1},$$

wobei die Knoten wie im Funktionenraum F sein sollen.

Dann besitzt die Funktion $f-s$ höchstens $n+k$ Nullstellen.

Beweis: Anwendung des Satzes von Rolle und von Satz 11.2.

(II) Umwandlung eines Interpolationsproblems für Monosplines in ein Approximationsproblem.

Es seien die Punkte $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2k}$ vorgegeben. Gesucht wird der Monospline M vom Grad n mit k Knoten, für den

$$M(x_i) = 0 \quad i=1, \dots, n+2k$$

gilt.

Sei $B_{n-1,2k}$ der $2k$ -dimensionale Raum, der von den B-Splines vom Grad $n-1$ zu den Knoten $(x_i)_{i=1}^{n+2k}$ aufgespannt wird.

Sei weiterhin

$$S_{n-1,n+2k} = \{ s \mid s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^{n+2k} b_i (x-x_i)_+^{n-1} \}.$$

Die Knotenmenge des gesuchten Monosplines wird sich als die Kontaktpunktmenge einer Fehlerfunktion ergeben, die ein einseitiges Approximationsproblem löst. Dabei werden Funktionen approximiert, wie sie in der folgenden Definition festgelegt werden.

Def. 11.4. Es sei $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2k} < x_{n+2k+1}$ und g eine Funktion mit den Eigenschaften von (11.2) zu den Punkten $(x_i)_{i=0}^{n+2k+1}$. Außerdem sei $\bar{s} \in S_{n-1, n+2k}$ ein Spline mit

$$\begin{aligned} g^{(i)}(x_0) &= \bar{s}^{(i)}(x_0) \\ g^{(i)}(x_{n+2k+1}) &= \bar{s}^{(i)}(x_{n+2k+1}) \end{aligned} \quad i=0, \dots, n-1.$$

Dann definieren wir

$$(11.3) \quad \bar{f} := g - \bar{s}.$$

Diese Funktionen besitzen die folgenden wichtigen Eigenschaften.

Lemma 11.5. Für jede Funktion $\bar{f}$, die wie in Def. 11.4 festgelegt ist, gilt:

Auf den Intervallen $[x_0, x_{i+1}]$, bzw. $[x_{n+2k-i}, x_{n+2k+1}]$ für $i=0, \dots, n+2k$ hat $\bar{f}-s$ höchstens $n+i$ Nullstellen.

(In x_0 und x_{n+2k+1} liegen n -fache Nullstellen). Dabei ist $s \in R_{n-1, 2k}$.

Beweis: Die Funktion $(f-s)^{(n-2)}$ kann dargestellt werden durch $\bar{f}-\bar{s}^{(n-2)}=h-p$, wobei p ein Polynomzug und h wie in Def. 11.1 definiert sei. Dann besitzt $(\bar{f}-\bar{s})^{(n-2)}$ nach Satz 11.2 auf $[x_0, x_{i+1}]$ höchstens $i+2$ Nullstellen. Nach dem Satz von Rolle kann $f-s$ höchstens $n+i$ Nullstellen auf $[x_0, x_{i+1}]$ haben.

Ebenso läßt sich die Aussage für die Intervalle $[x_{n+2k-1}, x_{n+2k+1}]$ zeigen.

Lemma 11.6 Gegeben seien die Punktmengen $X = (x_i)_{i=1}^{n+m}$

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+m} \quad x_i < x_{i+n-1}$$

und $V = (v_i)_{i=1}^r$ mit $r \leq m$ und

$$v_1 < v_2 < \dots < v_m .$$

Es gelte weiterhin, daß $(v_i)_{i=1}^r \subset (x_1, x_{n+m})$ und jedes Intervall $[x_1, x_{1+i}]$, bzw. $[x_{n+m-i}, x_{n+m}]$ für $i=1, \dots, m$ höchstens i Punkte von V enthält.

Dann bildet V eine Menge mit den Eigenschaften von Def. 10.3 auf X .

Beweis: Es wird ein Induktionsbeweis über m durchgeführt. Für $m=1$ ist die Aussage klar. Die Behauptung sei für alle $m < t$ richtig. Wir zeigen, daß sie auch für $m=t$ gilt.

Es sei also $(v_i)_{i=1}^r$ mit $r \leq t$ auf (x_1, x_{n+t}) gegeben. Im

folgenden wollen wir mit $(u_i)_{i=1}^t$ stets die Menge bezeichnen, in die $(v_i)_{i=1}^r$ eingebettet wird. Dabei werden folgende Fallunterscheidungen getroffen:

(a) Es sei $r < t$ und $v_t < x_{n+t-1}$. Eine Anwendung der Induktionsannahme auf $(v_i)_{i=1}^r$ und (x_1, x_{n+t-1}) liefert $(u_i)_{i=1}^{t-1}$. u_t kann in (x_t, x_{n+t}) gewählt werden.

(b) Es sei $r < t$ und $v_t \in [x_{n+t-1}, x_{n+t}]$. Die Anwendung der Induktionsannahme auf $(v_i)_{i=1}^{r-1} \subset (x_1, x_{n+t-1})$ liefert $(u_i)_{i=1}^{t-1}$. Außerdem wird $u_t = v_t$ gesetzt.

(c) Wenn $r = t$ ist, folgt $x_i < v_i$ und $v_{t-i+1} < x_{n+t-i+1}$ für $i = 1, \dots, t$. Dies bedeutet

$$v_i \in (x_i, x_{i+n}) \quad i = 1, \dots, t$$

und damit $u_i = v_i$ für $i = 1, \dots, t$.

Satz 11.7 Sei $\bar{f}$ eine Funktion, wie sie in Def. 11.4 angegeben wird. Auf dem Teilintervall $[x_1, x_{n+2k}]$ werde $\bar{f}$ einseitig durch Elemente aus $B_{n-1, 2k}[x_1, x_{n+2k}]$ in der L_1 -Norm approximiert. Der Spline $s_0 \in B_{n-1, 2k}$ sei eine Minimallösung an $f = \bar{f} | [x_1, x_{n+2k}]$.

(a) Der Spline s_0 ist eindeutig bestimmt.

(b) Die Fehlerfunktion $f - s_0$ besitzt genau k Kontaktpunkte

$(u_i)_{i=1}^k$, die in (x_1, x_{n+2k}) liegen.

(c) Die Punkte $(u_i)_{i=1}^k$ sind die Knoten eines Monosplines

$$M(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - \sum_{i=1}^k b_i (x-u_i)_+^{n-1},$$

der

$$M(x_i) = 0 \quad i=1, \dots, n+2k$$

erfüllt.

Beweis: Es wird zunächst gezeigt, daß für alle $s \in B_{n-1,2k}$ mit $(f-s)(x) \geq 0$ für $x \in [x_1, x_{n+2k}]$ die Menge der Kontaktpunkte von $f-s$ eine Menge mit den Eigenschaften von Def. 10.3 ist. Aus Lemma 11.5 folgt, daß in x_1 und x_{n+2k} keine Nullstellen von $f-s$ liegen; denn $f-s$ enthält in $[x_0, x_1]$ und $[x_{n+2k}, x_{n+2k+1}]$ höchstens jeweils n Nullstellen. Sie liegen in x_0 und x_{n+2k+1} . Unser Approximationsproblem ist auf $[x_1, x_{n+2k}]$ beschränkt. Daher liegen alle Kontaktpunkte im Innern von $[x_1, x_{n+2k}]$. Weiterhin erhält man aus Lemma 11.5, daß jedes Intervall $[x_1, x_{i+1}]$ und $[x_{n+2k-i}, x_{n+2k}]$ höchstens i Nullstellen von $f-s$ hat. Nach Lemma 11.6 besitzt deshalb die Kontaktpunktmenge für jede Funktion $f-s$ die erforderlichen Eigenschaften.

Wegen Satz 10.1 existiert eine Minimallösung s_0 ; nach Folgerung 10.6 ist s_0 eindeutig bestimmt.

Satz 10.5 ergibt, daß $f-s_0$ wenigstens $2k$ Nullstellen besitzen muß. Nach Lemma 11.5 kann $f-s_0$ aber höchstens $2k$ Nullstellen haben. Damit hat $f-s_0$ genau $2k$ Nullstellen

und genau k Kontaktpunkte. Nachdem die Kontaktpunktmenge die Eigenschaften von Def. 10.3 erfüllt, sind die Kontaktpunkte Stützstellen einer Quadraturformel, die die Elemente des Raumes $B_{n-1,2k}$ exakt integriert (siehe Satz 10.4). Satz 4.3 ordnet dieser Quadraturformel einen Monospline zu, der die gewünschten Nullstellenbedingungen erfüllt.

Bemerkung 11.8 Es wurde eine Menge von Funktionen definiert, so daß die einseitige Approximation die Knoten eines Monosplines liefert. Man sieht also auch, daß die Lage der Kontaktpunkte für alle Funktionen dieser Klasse gleich ist.

Hier wird gleichzeitig ein Existenzbeweis für das Interpolationsproblem angegeben und eine Möglichkeit, die Knoten mit Hilfe eines Approximationsproblems zu bestimmen. Das Problem wurde nur für einfache Nullstellen behandelt. Die Überlegungen lassen sich auch auf mehrfache Nullstellen übertragen.

(III) Beispiele für einseitige Approximation.

Es wird der Splineraum

$$S_{n-1,k}[a,b] = \{s \mid s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^k b_i (x-y_i)_+^{n-1}\}$$

$$a < y_1 < y_2 < \dots < y_k < b, \quad n \geq 2 \}$$

zugrunde gelegt. Wenn in $B_{n-1,n+k}[a,b]$ die Knoten

$$x_i = a \quad i=1, \dots, n$$

$$(11.3) \quad x_{i+n} = y_i \quad i=1, \dots, k$$

$$x_{i+k+n} = b \quad i=1, \dots, n$$

gesetzt werden, dann ist $B_{n-1,n+k} = S_{n-1,k}$.

Satz 11.9. Die Funktion x^n auf $[a,b]$ wird einseitig in der L_1 -Norm durch Elemente aus $S_{n-1,k}$ approximiert.

(a) Es gibt genau eine Minimallösung $s_0 \in S_{n-1,k}$.

(b) Die Fehlerfunktion $x^n - s_0(x)$ besitzt Nullstellen $(t_i)_{i=1}^{n+k}$, die

$$(f - s_0)(t_i) = 0$$

$$t_i < y_i < t_{i+n} \quad i=1, \dots, k$$

erfüllen.

Beweis: Zunächst wird wieder gezeigt, daß alle Funktionen

$M(x) = x^n - s(x)$ mit $s \in S_{n-1,k}$ und $M(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$

eine Kontaktpunktmenge haben, die die Eigenschaft von

Def. 10.3 besitzt. $M(x) = x^n - s(x)$ hat auf $[x_1, x_{n+i+1}]$

und $[x_{n+k-i-1}, x_{2n+k}]$ höchstens $i + [\frac{n}{2}] + 1$ Kontaktpunkte,

wenn (x_i) wie in (11.3) ist. Daher besitzt M auf diesen

Intervallen nicht mehr als $i+n$ Kontaktpunkte.

Die Kontaktpunktmenge von den Funktionen $M(x) = x^n - s(x)$ besitzt nach Lemma 11.6 die gewünschten Eigenschaften. Die Existenz der Minimallösung folgt aus Satz 10.1, die Eindeutigkeit aus Folgerung 10.6. Die Aussagen von (b) ergeben sich aus Satz 1.3 und Satz 10.5.

Dieser Satz kann in folgendem Zusammenhang eine Anwendung finden.

Das Restglied bei Quadraturformeln hat die Gestalt

$$R(f) = (-1)^n \int_a^b M(x) f^{(n)}(x) dx.$$

Wenn M das Vorzeichen nicht wechselt, dann gibt es ein $\eta \in [a, b]$, so daß

$$R(f) = (-1)^n f^{(n)}(\eta) \int_a^b M(x) dx$$

gilt. Es liegt daher nahe, die Funktion x^n einseitig durch Splinefunktionen zu approximieren, um beste Quadraturformeln für sogenannte semidefinite Kerne zu erhalten (siehe Schmeißer, Jetter).

Anmerkung: Augenblicklich beschäftigen sich auch noch C.A. Micchelli und A. Pinkus mit L_1 -Approximation durch Splinefunktionen mit festen Knoten.

L i t e r a t u r

BARRODALE I.

On computing best L_1 approximations. In: Approximation theory (edit. by A. Talbot), London-New York, Academic Press 1970.

BOJANIC R. and R. DE VORE.

On polynomials of best one-sided approximation, L'Enseignement Math. 12 (1966), 139 - 144.

DE BOOR C.

A remark concerning perfect splines, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 724 - 727.

BRAESS D.

Chebyshev Approximation by Spline Functions with free knots, Num. Math. 17 (1971), 357 - 366.

BROSOWSKI B.

Nichtlineare Approximation in normierten Vektorräumen, In "Abstract Spaces and Approximation", ISNM 10, 140 - 159, Birkhäuser-Verlag, 1970.

CAVARETTA A. S., Jr.

On Cardinal Perfect Splines of Least Sup-Norm on the Real Axis, J. Approx. Theory 8 (1973), 285 - 303.

CURRY H. B. and I. J. SCHOENBERG.

On spline distributions and their limits: The Polya distribution functions, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 1114.

DE VORE R.

One-sided approximation of functions, J. Approx.
Theory 1 (1968), 11 - 25.

ELSNER L.

Ein Optimierungsproblem der Analysis, Bericht 018 des
Instituts für Angewandte Mathematik I, Erlangen.

FAVARD J.

Sur l'interpolation, J. Math. Pures Appl. (9) 19
(1940), 281 - 306.

GLAESER G.

Prolongement extrême de fonctions différentiables
d'une variable, J. Approx. Theory 8 (1973), 249 - 261.

HANDSCOMB D. C.

Characterization of best spline approximations with
free knots, In: Approximation Theory (edit. by A. Talbot),
London-New York, Academic Press 1970.

HOBBY C. R. and J. R. RICE.

A moment problem in L_1 approximation, Proceed. Amer.
Math. Soc., 16 (1965), 665 - 670.

JETTER K.

Splines und optimale Quadraturformeln, Dissertation Tü-
bingen, 1973.

KARLIN S.

1 Total Positivity, Stanford University Press, Stanford,
California, 1968

- 2 Best quadrature formulas and interpolation by splines satisfying boundary conditions. In: Approximations with special emphasis on spline functions, ed. by I. J. Schoenberg, 447 - 466. Academic Press, New York, 1969.
- 3 The fundamental theorem of algebra for monosplines satisfying certain boundary conditions and applications to optimal quadrature formulas. In: Approximations with special emphasis on spline functions, ed. by I. J. Schoenberg, 467 - 484. Academic Press, New York, 1969.
- 4 Best quadrature formulas and splines, J. Approx. Theory 4 (1971), 59 - 90.
- 5 Some variational problems on certain Sobolev spaces and perfect splines, Bull. Amer. Math. Soc., 79 (1973), 124 - 128.

KARLIN S. and C. MICCHELLI.

The fundamental theorem of algebra for monosplines satisfying boundary conditions, Israel J. Math. 11 (1972), 405 - 451.

KARLIN S. and L. SCHUMAKER.

The fundamental theorem of algebra for Tchebycheffian monosplines, J. Analyse Math. 20 (1967), 233 - 270.

KRIPKE B. R. and T. J. RIVLIN

Approximation in the metric $L^1(X, \mu)$, Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965), 101 - 122.

MEINARDUS G.

Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Berlin-Heidelberg-New York, 1964.

MICCHELLI C. A.

- 1 Some minimum problem for spline functions with applications to quadrature formulas. In: Approximation Theory (edit. by G. G. Lorentz) London-New York, Academic Press, 1973
- 2 Best quadrature formulas at equally spaced nodes, J. Math. Anal. Applic., 47 (1974), 232 - 249.

MICCHELLI C. A. and T. J. RIVLIN

Quadrature Formulae and Hermite-Birkhoff Interpolation, Advances in Math. 11 (1973), 93 - 112.

NÖRLUND N. E.

"Vorlesungen über Differenzenrechnung", Springer-Verlag Berlin 1924.

RICE J. R.

"The Approximation of Functions", Addison-Wesley, vol. I 1964, vol. II 1969

SCHMEISSER G.

Optimale Quadraturformeln mit semidefiniten Kernen, Num. Math. 20 (1973), 32 - 53.

SCHOENBERG, I. J.

- 1 On best approximations of linear operators, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 26 (1964), 155 - 163

- 2 On monosplines of least deviation and best quadrature formulae, J. Siam Numer. Anal. Ser. B 2 (1965), 144 - 170
- 3 On monosplines of least square deviation and best quadrature formulae II, J. Siam Numer. Anal. 3 (1966), 321 - 328.
- 4 Monosplines and quadrature formulae. In: Theory and applications of spline functions, ed. by T.N.E. Greville, New York, Academ. Press 1969, 157 - 207.
- 5 A second look at approximate quadrature formulae and spline interpolation, Advances in Math. 4 (1970), 277 - 300.
- 6 The perfect B-splines and a time optimal control problem, Israel J. Math. 8 (1971), 261 - 275.

SCHUMAKER L. L.

- 1 Uniform Approximation by Tchebycheffian spline functions, J. Math. Mech. 18 (1968), 369 - 378.
- 2 Uniform approximation by chebyshev spline functions II: free knots, Siam J. Numer. Anal. 5 (1968), 647 - 656.

STRAUSS H.

- 1 L_1 -Approximation mit Splinefunktionen, ISNM 26, Birkhäuser-Verlag, 1975
- 2 Eindeutigkeit bei der gleichmäßigen Approximation mit Tschebyscheffschen Splinefunktionen, erscheint in Journ. Approx. Theory.

- 3 Nichtlineare L_1 -Approximation, Bericht 020 des
Instituts für Angewandte Mathematik I,
Erlangen, 1973.

MICCHELLI C. A.

Best L^1 -Approximation by weak chebyshev systems
and the uniqueness of interpolating perfect splines,
IBM Research Report RC 5388, 1975.

MICCHELLI C. A. and A. PINKUS

Moment theory for weak cheyshev systems with
applications to monosplines, quadrature formulae
and best one-sided L^1 -approximation by spline
functions with fixed knots, IBM Research Report,
RC 5529, 1975.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990